KVANTTIMEKANIIKKA II **Tentti** 20.1. 2010

1. Kahden $j = \frac{1}{2}\hbar$ hiukkasen spinit vuorovaikuttavat toistensa ja ulkoisen magneettikentän kanssa, kuten ilmenee Hamiltonin funktiosta $H = 2\mu \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 + \omega(S_{1z} + S_{2z})$, missä μ ja ω ovat reaalivakioita.

   (a) Löydä tämän Hamiltonin funktion kahden hiukkasen ominaistilat ja -arvot.

   (b) Hetkellä $t = 0$ hiukkaset ovat tilassa $S_{1z} = \frac{1}{2}\hbar$ ja $S_{2z} = -\frac{1}{2}\hbar$. Määrittele prekessioaika t, jossa hiukkasten tila palaa alkutilaan.

2. Tarkastellaan harmonisen värähtelijän operaattorien ja tilojen unitaarista muunnosta $U = \exp(i\alpha\hat{x})$.

   (a) Löydä muunnetut paikka- ja impulssioperaattorit $\hat{x}', \hat{p}'$, ja lausu muunnettu Hamiltonin funktio H' muunnettujen operaattorien $\hat{a}', \hat{a}'^\dagger$ avulla.

   (b) Lausu muunnettu perustila $|0\rangle'$ alkuperäisten tilojen $|n\rangle$ avulla, ja määritä sen aaltofunktio $\langle x|0\rangle'$.

3. Lorentz-muunnosten kuusi generaattoria voidaan esittää muodossa $J_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$.

   (a) Päättele tästä esityksestä, miten kiertojen generaattorit $J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}J_{jk}$ sekä puskujen generaattorit $K_i = J_{i0}$ muuntuvat pariteetissa $\mathcal{P}$ ja ajankäännössä $\mathcal{T}$.

   (b) Tarkastele, miten $\mathcal{P}$ ja $\mathcal{T}$ vaikuttavat Lien algebran relaatioihin $[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$, $[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k$ sekä $[K_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k$.

4. Tila $|\psi\rangle = \big[|\uparrow\rangle_A \otimes (|\uparrow\rangle + c|\downarrow\rangle)_B + |\downarrow\rangle_A \otimes (|\uparrow\rangle - c|\downarrow\rangle)_B\big]/\sqrt{2(1+c^2)}$ kuvaa kahden kietoutuneen elektronin A, B spinejä.

   (a) Osoita, että odotusarvot, jotka ovat muotoa $\langle \mathcal{O}_A \rangle \equiv \langle \psi | \mathcal{O}_A \otimes \mathbb{1}_B | \psi \rangle$, missä vain hiukkasen A spin mitataan, voidaan esittää tiheysmatriisilla ρ muodossa $\langle \mathcal{O}_A \rangle = \mathrm{tr}\rho\mathcal{O}_A$. Esitä ρ tilojen $|\uparrow\rangle_A$, $|\downarrow\rangle_A$ muodostamassa kannassa.

5. (a) Lausu vapaan Diracin yhtälön ratkaisut käyttämällä kaavakokoelmassa annettuja spinoreita u ja v. Tarkista, että kirjoittamasi ratkaisu toteuttaa yhtälön.

   (b) Osoita, että jos $\psi(x)$ on vapaan Diracin yhtälön ratkaisu, niin myös $\gamma_5\psi(-x)$ on ratkaisu. Tarkista tämä (a)-kohdan ratkaisuistasi.

   (c) Kirjoita Diracin yhtälö hiukkaselle sähkömagneettisessa potentiaalissa $A^\mu(x)$. Millä ehdolla (b)-kohdan väite yhä pätee, eli $\gamma_5\psi(-x)$ on ratkaisu kun $\psi(x)$ on ratkaisu?

Kaavakokoelma eri paperilla.