

Tuesday 13 May at 12-16 in aud E204

1. The six generators of Lorentz transformations can be represented as $J_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$.
 - (a) Deduce from this the behaviour of the generators of rotations $J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}J_{jk}$ and boosts $K_i = J_{i0}$ under parity \mathcal{P} and time reversal \mathcal{T} .
 - (b) Find the behaviour under \mathcal{P} and \mathcal{T} of the Lie algebra relations $[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$, $[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k$ and $[K_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k$.
2. A harmonic oscillator for two fermions is defined by the Hamiltonian $H = \hbar\omega(b_{\mathbf{x}}^\dagger b_{\mathbf{x}} + b_{-\mathbf{x}}^\dagger b_{-\mathbf{x}})$, where $\{b_{\mathbf{x}}, b_{\mathbf{x}}^\dagger\} = 1$ and $b_{\mathbf{x}}^\dagger$ creates a fermion at space position \mathbf{x} .
 - (a) Find the eigenstates and -energies of this Hamiltonian.
 - (b) Consider how the operators $b_{\mathbf{x}}^\dagger$ should transform under parity \mathcal{P} . Is the Hamiltonian parity invariant?
 - (c) Are the eigenstates of H that you found in (a) also eigenstates of \mathcal{P} ? Explain why they have to be (or do not have to be).
3. The state $|\psi\rangle = [|\uparrow\rangle_A \otimes (|\uparrow\rangle + c|\downarrow\rangle)_B + |\downarrow\rangle_A \otimes (|\uparrow\rangle - c|\downarrow\rangle)_B] / \sqrt{2(1+c^2)}$ describes the entangled spins of two electrons A, B .
 - (a) Show that expectation values of the form $\langle \mathcal{O}_A \rangle \equiv \langle \psi | \mathcal{O}_A \otimes \mathbb{1}_B | \psi \rangle$, *i.e.*, when only the spin of A is measured, can be expressed in terms of a density matrix ρ as $\langle \mathcal{O}_A \rangle = \text{tr} \rho \mathcal{O}_A$. Give ρ in the basis formed by the states $|\uparrow\rangle_A, |\downarrow\rangle_A$.
 - (b) Express the above density matrix as $\rho = \sum_i w_i |\alpha_i\rangle_A \langle \alpha_i|$. What are the probabilities w_i and the states $|\alpha_i\rangle_A$? For which value of c does ρ describe a pure state?
4.
 - (a) Express the solutions of the free Dirac equation in terms of the u and v spinors given in the formula collection. Verify that your solution satisfies the equation.
 - (b) Show that if $\psi(x)$ solves the free Dirac equation then so does $\gamma_5\psi(-x)$. How is this satisfied by your solutions in (a)?
 - (c) Write the Dirac equation in the presence of an electromagnetic potential $A^\mu(x)$. Under which condition is the statement in (b) still true, *i.e.*, $\gamma_5\psi(-x)$ is a solution when $\psi(x)$ is a solution?
5. The annihilation operators of a scalar particle transform as $U(\Lambda)a_{\mathbf{p}}U^{-1}(\Lambda) = a_{\mathbf{p}'}$ under a Lorentz transformation $\mathbf{p}' = \Lambda\mathbf{p}$. Similarly under parity and time reversal, $\mathcal{P}a_{\mathbf{p}}\mathcal{P}^{-1} = \eta_{\mathcal{P}}a_{-\mathbf{p}}$ and $\mathcal{T}a_{\mathbf{p}}\mathcal{T}^{-1} = \eta_{\mathcal{T}}a_{-\mathbf{p}}$, where $\eta_{\mathcal{P}}, \eta_{\mathcal{T}} = \pm 1$.
 - (a) Show explicitly how the scalar field

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} (a_{\mathbf{p}}e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x})$$

transforms under Lorentz transformations, parity, and time reversal.

- (b) Show how the free Lagrangian density $\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\phi(x)(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi(x)$ transforms under these transformations.

You may consult the enclosed collection of Clebsch-Gordan coefficients, rotation and Pauli matrices, etc.

Tiistaina 13. toukokuuta klo 12-16 E204

1. Lorentz-muunnosten kuusi generaattoria voidaan esittää muodossa $J_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$.
 - (a) Päättelä tästä esityksestä, miten kiertojen generaattorit $J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}J_{jk}$ sekä puskujen generaattorit $K_i = J_{i0}$ muuntuvat pariteetissa \mathcal{P} ja ajankäännössä \mathcal{T} .
 - (b) Tarkastele, miten \mathcal{P} ja \mathcal{T} vaikuttavat Lien algebran relaatioihin $[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$, $[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k$ sekä $[K_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k$.
2. Kahden fermionin harmonista oskillaattoria kuvaa Hamiltonin funktio $H = \hbar\omega(b_{\mathbf{x}}^\dagger b_{\mathbf{x}} + b_{-\mathbf{x}}^\dagger b_{-\mathbf{x}})$, jossa $\{b_{\mathbf{x}}, b_{\mathbf{x}}^\dagger\} = 1$ ja $b_{\mathbf{x}}^\dagger$ luo fermionin paikkaan \mathbf{x} .
 - (a) Löydä tämän Hamiltonin funktion ominaisarvot sekä -tilat.
 - (b) Tarkastele, miten operaattorien $b_{\mathbf{x}}^\dagger$ tulisi muuntua pariteetissa \mathcal{P} . Onko Hamiltonin funktio invariantti pariteettimuunnoksessa?
 - (c) Ovatko (a)-kohdassa löytämäsi H :n ominaistilat myös \mathcal{P} :n ominaistiloja? Selitä, miksi niiden täytyy olla (tai ei täydy olla).
3. Tila $|\psi\rangle = [|\uparrow\rangle_A \otimes (|\uparrow\rangle + c|\downarrow\rangle)_B + |\downarrow\rangle_A \otimes (|\uparrow\rangle - c|\downarrow\rangle)_B] / \sqrt{2(1+c^2)}$ kuvaa kahden kietoutuneen elektronin A, B spinejä.
 - (a) Osoita, että odotusarvot, jotka ovat muotoa $\langle \mathcal{O}_A \rangle \equiv \langle \psi | \mathcal{O}_A \otimes \mathbb{1}_B | \psi \rangle$, missä vain hiukkasen A spin mitataan, voidaan esittää tiheysmatriisilla ρ muodossa $\langle \mathcal{O}_A \rangle = \text{tr} \rho \mathcal{O}_A$. Esitä ρ tilojen $|\uparrow\rangle_A, |\downarrow\rangle_A$ muodostamassa kannassa.
 - (b) Esitä (a)-kohdan tiheysmatriisi muodossa $\rho = \sum_i w_i |\alpha_i\rangle_A \langle \alpha_i|$. Mitkä ovat todennäköisyydet w_i sekä tilat $|\alpha_i\rangle_A$? Millä c :n arvolla ρ kuvaa puhdasta tilaa?
4. (a) Lausu vapaan Diracin yhtälön ratkaisut käyttämällä kaavakokoelmassa annettuja spinoreita u ja v . Tarkista, että kirjoittamasi ratkaisu toteuttaa yhtälön.
 - (b) Osoita, että jos $\psi(x)$ on vapaan Diracin yhtälön ratkaisu, niin myös $\gamma_5\psi(-x)$ on ratkaisu. Tarkista tämä (a)-kohdan ratkaisustasi.
 - (c) Kirjoita Diracin yhtälö hiukkaselle sähkömagneettisessa potentiaalissa $A^\mu(x)$. Millä ehdolla (b)-kohdan väite yhä pätee, eli $\gamma_5\psi(-x)$ on ratkaisu kun $\psi(x)$ on ratkaisu?
5. Skalaarihiukkasen hävitysoperaattorit muuntuvat kuten $U(\Lambda)a_{\mathbf{p}}U^{-1}(\Lambda) = a_{\mathbf{p}'}$ Lorentz-muunnoksessa $\mathbf{p}' = \Lambda\mathbf{p}$. Vastaavasti pariteetissa ja ajankäännössä, $\mathcal{P}a_{\mathbf{p}}\mathcal{P}^{-1} = \eta_{\mathcal{P}}a_{-\mathbf{p}}$ ja $\mathcal{T}a_{\mathbf{p}}\mathcal{T}^{-1} = \eta_{\mathcal{T}}a_{-\mathbf{p}}$, jossa $\eta_{\mathcal{P}}, \eta_{\mathcal{T}} = \pm 1$.
 - (a) Näytä eksplisiittisesti, miten

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} (a_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip\cdot x})$$

muuntuu Lorentz-muunnoksessa, pariteetissa ja ajankäännössä.

- (b) Näytä, miten vapaa Lagrangen tiheys $\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\phi(x)(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi(x)$ muuntuu näissä muunnoksissa.

Voit käyttää oheista kaavakokoelmaa, johon on kerätty Clebsch-Gordan-kertoimia, kierto- ja Paulin matriiseja, yms.