QUANTUM MECHANICS II Spring 2009 **Partial Examination 2/2**

Friday 8 May at 9-13 in aud D101

1. (a) Determine the transformation properties under parity and time reversal of the creation and annihilation operators $a^\dagger$, a of the harmonic oscillator.

   (b) What (if any) constraints does parity impose on the wavefunctions of the harmonic oscillator? Explain.

   (c) What (if any) constraints does time reversal impose on the wavefunctions of the harmonic oscillator? Explain.

2. (a) A general entangled state $|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij}|i\rangle_A|j\rangle_B$, where A, B denote independent Hilbert spaces and the c_{ij} are complex numbers. Show that $\langle\psi|\mathcal{O}_A|\psi\rangle = \mathrm{Tr}[\rho\,\mathcal{O}_A]$ when $\mathcal{O}_A$ is an operator in space A, and determine the density matrix ρ.

   (b) Verify that $\mathrm{Tr}\rho = 1$, and $\mathrm{Tr}\rho^2 \leq 1$.

3. The Hamiltonian of a two-fermion system is $H =: E_1 b_1^\dagger b_1 + E_2 b_2^\dagger b_2 - \sqrt{E_1 E_2}(b_1 b_2^\dagger + b_2 b_1^\dagger)$: where $b_k^\dagger$ creates a fermion of type $k = 1, 2$, the only non-vanishing anticommutator is $\{b_k^\dagger, b_l\} = \delta_{k,l}$ and : : denotes normal ordering. Find all normalized eigenstates and -energies of this Hamiltonian.

4. Consider the Dirac equation in $D = 1 + 1$ (one time + one space) dimensions.

   (a) Write down a general Lorentz transformation $x' = \Lambda x$ explicitly for the time x'^0 and space x'^1 components. How many parameters does Λ have?

   (b) Find a set of 2×2 Dirac matrices γ^μ which satisfy $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ in $D = 1 + 1$.

   (c) Find the plane-wave solutions of momentum p^1 of the free Dirac equation.

5. The parity operator $\mathcal{P}$ transforms the electron operator according to $\mathcal{P} b_{\boldsymbol{p},s} \mathcal{P}^{-1} = \eta_P b_{-\boldsymbol{p},s}$, where $\eta_P = \pm 1$.

   (a) Derive the parity transformation property of the relativistic Dirac field

   $$\Psi(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2E_p} \sum_s \left[b_{\boldsymbol{p},s} u(\boldsymbol{p}, s) e^{-ip\cdot x} + d_{\boldsymbol{p},s}^\dagger v(\boldsymbol{p}, s) e^{ip\cdot x} \right]$$

   (b) Similarly show how the Dirac bilinear $\bar{\Psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\Psi(x)$ transforms under parity.

You may consult the enclosed collection of Clebsch-Gordan coefficients, rotation and Pauli matrices, etc.

Perjantaina 8. toukokuuta klo 9-13 salissa D101

1. (a) Määrää harmonisen oskillaattorin luomis- ja hävitysoperaattorien $a^\dagger$, a käyttäytyminen pariteettimuunnoksessa ja ajankäännössä.
   (b) Millaisia ehtoja (jos mitään) pariteetti antaa harmonisen oskillaattorin aaltofunktioille? Selitä.
   (c) Millaisia ehtoja (jos mitään) ajankääntö antaa harmonisen oskillaattorin aaltofunktioille? Selitä.

2. (a) Yleinen lomittunut tila $|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij}|i\rangle_A|j\rangle_B$, jossa A, B ovat riippumattomia Hilbert-avaruuksia ja c_{ij} ovat kompleksilukuja. Osoita, että $\langle\psi|\mathcal{O}_A|\psi\rangle = \mathrm{Tr}[\rho\,\mathcal{O}_A]$, kun $\mathcal{O}_A$ on operaattori avaruudessa A, ja määrää tiheysmatriisi ρ.
   (b) Tarkista, että $\mathrm{Tr}\rho = 1$, ja $\mathrm{Tr}\rho^2 \leq 1$.

3. Kahden fermionin systeemin Hamiltonin operaattori $H =: E_1 b_1^\dagger b_1 + E_2 b_2^\dagger b_2 - \sqrt{E_1 E_2}(b_1 b_2^\dagger + b_2 b_1^\dagger) :$, jossa $b_k^\dagger$ luo tyypin $k = 1, 2$ fermionin, ainoa nollasta eroava antikommutaattori on $\{b_k^\dagger, b_l\} = \delta_{k,l}$, ja : : merkitsee normaalijärjestystä. Löydä kaikki tämän Hamiltonin operaattorin normitetut ominaistilat ja -energiat.

4. Tarkastele Diracin yhtälöä $D = 1 + 1$ (yksi aika + yksi paikka) ulottuvuudessa.
   (a) Kirjoita yleinen Lorentz-muunnos $x' = \Lambda x$ eksplisiittisesti aikakomponentille x'^0 ja paikkakomponentille x'^1. Kuinka monta parametria Λ:ssa on?
   (b) Löydä joukko 2×2 Dirac-matriiseja γ^μ, joille $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ $D = 1 + 1$ ulottuvuudessa.
   (c) Löydä vapaan Diracin yhtälön impulssin p^1 omaavat tasoaaltoratkaisut.

5. Pariteettioperaattori $\mathcal{P}$ muuntaa elektronioperaattorin $\mathcal{P} b_{\boldsymbol{p},s} \mathcal{P}^{-1} = \eta_P b_{-\boldsymbol{p},s}$, jossa $\eta_P = \pm 1$.
   (a) Laske, miten relativistinen Diracin kenttä muuntuu pariteetissa
   $$\Psi(x) = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3 2E_p} \sum_s \left[b_{\boldsymbol{p},s} u(\boldsymbol{p}, s) e^{-ip\cdot x} + d_{\boldsymbol{p},s}^\dagger v(\boldsymbol{p}, s) e^{ip\cdot x} \right]$$
   (b) Vastaavasti näytä, miten Diracin bilineaari $\bar{\Psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\Psi(x)$ muuntuu pariteetissa.

Voit käyttää oheista kaavakokoelmaa, johon on kerätty Clebsch-Gordan-kertoimia, kierto- ja Paulin matriiseja, yms.