

Thursday 12 May at 9-13 in aud E204

1. The six generators of Lorentz transformations can be represented as $J_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$.
 - (a) Deduce from this the behaviour of the generators of rotations $J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}J_{jk}$ and boosts $K_i = J_{i0}$ under time reversal \mathcal{T} .
 - (b) Find the behaviour under \mathcal{T} of the Lie algebra relations $[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$, $[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k$ and $[K_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k$.
 - (c) Express the wave function $\psi_T(\mathbf{x})$ of the time reversed state $\mathcal{T}|\alpha\rangle$ in terms of the wave function $\psi(\mathbf{x})$ of the state $|\alpha\rangle$, when $\mathcal{T}|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}\rangle$.

2. Consider the Schrödinger equation for a free particle in one space dimension.
 - (a) Introduce the interaction with an electromagnetic potential $A(t, x) = (A^0, A^1)$ by minimal substitution.
 - (b) The harmonic oscillator is described by the potential $eA(t, x) = (\frac{1}{2}m\omega^2x^2, 0)$. Make a gauge transformation which transforms $A(t, x) \rightarrow A_\Lambda(t, x) = (0, A_\Lambda^1)$. Give explicit expressions for A_Λ^1 and the wave function $\psi_\Lambda(t, x)$ of the harmonic oscillator ground state in this gauge.

3. Using the expression for the free photon field operator given in the collection of formulas:
 - (a) Calculate the amplitude $\langle 0|\mathbf{A}(t, \mathbf{x})a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger|0\rangle$ and give your interpretation.
 - (b) Photon scattering by a charge e is described by the operator $e a_{\mathbf{k}_1,\alpha_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2,\alpha_2}$. Calculate the scattering amplitude $\langle 0|\mathbf{A}(t, \mathbf{x})e a_{\mathbf{k}_1,\alpha_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2,\alpha_2} a_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger|0\rangle$ and interpret.

4. A Lorentz transformation Λ ($p' = \Lambda p$) transforms the electron annihilation operator as $U(\Lambda)b(\mathbf{p}, s)U^\dagger(\Lambda) = b(\mathbf{p}', s)$, and the spinors are related by $u(\mathbf{p}', s) = S(\Lambda)u(\mathbf{p}, s)$.
 - (a) Express the transformed electron field operators $U(\Lambda)\psi(x)U^\dagger(\Lambda)$ and $U(\Lambda)\bar{\psi}(x)U^\dagger(\Lambda)$ in terms of $\psi(x)$ and $\bar{\psi}(x)$, respectively.
Recall: $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = S^{-1}(\Lambda)$.
 - (b) Deduce from this result how the bilinears $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ and $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ transform.

You may consult the enclosed collection of Clebsch-Gordan coefficients, rotation and Pauli matrices, etc.

Torstaina 12. toukokuuta klo 9-13 salissa E204

1. Lorentz-muunnosten kuusi generaattoria voidaan esittää muodossa $J_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$.
 - (a) Päättelä tästä esityksestä, miten kiertojen generaattorit $J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}J_{jk}$ ja puskujen generaattorit $K_i = J_{i0}$ muuntuvat ajankäännössä \mathcal{T} .
 - (b) Tarkastele, miten \mathcal{T} vaikuttaa Lien algebran relaatioihin $[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k$, $[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k$ sekä $[K_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k$.
 - (c) Lausu aikakäännetyin tilan $\mathcal{T}|\alpha\rangle$ aaltofunktio $\psi_T(\mathbf{x})$ tilan $|\alpha\rangle$ aaltofunktion $\psi(\mathbf{x})$ avulla, kun $\mathcal{T}|\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}\rangle$.
2. Tarkastele vapaan hiukkasen Schrödingerin yhtälöä yhdessä paikkaulottuvuudessa.
 - (a) Lisää yhtälöön vuorovaikutus sähkömagneettisen potentiaalin $A(t, x) = (A^0, A^1)$ kanssa käyttämällä minimaalista substituutiota.
 - (b) Harmonista oskillaattoria kuvaa potentiaali $eA(t, x) = (\frac{1}{2}m\omega^2x^2, 0)$. Tee mittamuunnos, joka muuntaa $A(t, x) \rightarrow A_\Lambda(t, x) = (0, A_\Lambda^1)$. Anna eksplisiittiset lausekkeet A_Λ^1 :lle sekä harmonisen oskillaattorin perustilan aaltofunktiolle $\psi_\Lambda(t, x)$ tässä mitassa.
3. Käyttäen vapaan fotonikentän operaattoria kaavakokoelmasta:
 - (a) Laske amplitudi $\langle 0|\mathbf{A}(t, \mathbf{x})a_{\mathbf{k}, \alpha}^\dagger|0\rangle$ ja anna fysikaalinen tulkintasi.
 - (b) Fotonin siroamista varauksesta e kuvataan operaattorilla $e a_{\mathbf{k}_1, \alpha_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2, \alpha_2}$. Laske siroamisamplitudi $\langle 0|\mathbf{A}(t, \mathbf{x})e a_{\mathbf{k}_1, \alpha_1}^\dagger a_{\mathbf{k}_2, \alpha_2} a_{\mathbf{k}, \alpha}^\dagger|0\rangle$ ja tulkitse tuloksesi.
4. Lorentz muunnos Λ ($p' = \Lambda p$) muuntaa elektronin tuhoamisoperaattoria $U(\Lambda)b(\mathbf{p}, s)U^\dagger(\Lambda) = b(\mathbf{p}', s)$, ja spinorit suhteutuvat toisiinsa $u(\mathbf{p}', s) = S(\Lambda)u(\mathbf{p}, s)$.
 - (a) Johda muunnettujen kenttäoperaattorien $U(\Lambda)\psi(x)U^\dagger(\Lambda)$ ja $U(\Lambda)\bar{\psi}(x)U^\dagger(\Lambda)$ yhteys alkuperäisiin $\psi(x)$ ja $\bar{\psi}(x)$.
Muista: $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = S^{-1}(\Lambda)$.
 - (b) Päättelä tuloksesta miten bilineaarit $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ ja $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$ muuntuvat kyseisessä muunnoksessa.

Voit käyttää oheista kaavakokoelmaa, johon on kerätty Clebsch-Gordan-kertoimia, kierto- ja Paulin matriiseja, yms.