Lyhyt johdatus kvanttiturbulenssiin

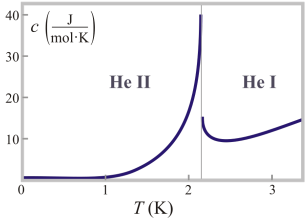
Niklas Hietala

Seminaariesitys 24.11.2011

Sisältö

Supranesteet – 1900-luvun löydös

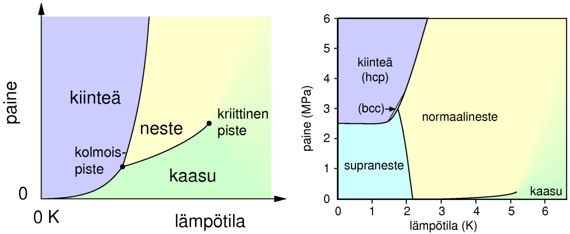
- 1908. Heike Kamerlingh Onnes onnistuu nesteyttämään heliumin. Heliumin ominaisuuksissa huomataan muutoksia noin 2 K:n lämpötilassa.
- 1938. Pjotr Kapitsa sekä John Allen ja Don Misener huomaavat heliumin virtaavan ilman viskositeettia.



Kuva: ^4He:n ominaislämpö lämpötilan funktiona T_λ:n ympäristössä. Lämpötilaa 2.17 K kutsutaan T_λ:ksi juuri, koska kuvaaja muistuttaa lambdaa.

Supranesteilmiölle esitettiin pian selitys

- 1938. Fritz London ehdottaa, että suprajuoksevuus johtuu Bosen-Einsteinin kondensaatiosta.
- 1938. László Tisza esittää kvalitatiivisen kaksinestemallin.
- 1941. Lev Landaun kaksinestemalli (kvantitettu hydrodynamiikka).



Kuva: Vasemmalla tyypillinen faasikaavio. Oikealla helium-4:n faasikaavio.

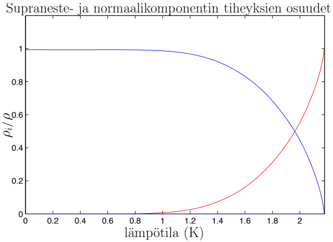
Supranesteen kuvailuun käytetään kaksinestemallia

Heliumin voidaan ajatella koostuvan kahdesta komponentista, supranestekomponentista ja normaalikomponentista. Komponenteilla on omat tiheys- ja nopeuskentät:

$$\rho = \rho_\mathsf{n} + \rho_\mathsf{s}$$

$$\boldsymbol{j} = \rho_\mathsf{n} \boldsymbol{v}_\mathsf{n} + \rho_\mathsf{s} \boldsymbol{v}_\mathsf{s}$$

Normaalikomponentti käyttäytyy kuin tavallinen viskoosinen neste. Supranestekomponentti virtaa viskoosittomasti, ja sen entropiatiheys on nolla.



Kuva: Supraneste- (sin.) ja normaalikomponentin (pun.) osuudet lämpötilan funktioina.

Koko kondensaatille postuloidaan yhteinen aaltofunktio

Supranesteet = makroskooppinen kvantti-ilmiö !
Kondensaatin aaltofunktio (eli systeemin järjestysparametri):

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \psi_0 e^{iS(\boldsymbol{r})}$$

Koko kondensaatille postuloidaan yhteinen aaltofunktio

Supranesteet = makroskooppinen kvantti-ilmiö !
Kondensaatin aaltofunktio (eli systeemin järjestysparametri):

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \psi_0 e^{iS(\boldsymbol{r})}$$

Tästä saadaan johdettua supranesteen nopeus:

$$\boldsymbol{v}_s = \frac{\hbar}{m}\nabla S$$

Koko kondensaatille postuloidaan yhteinen aaltofunktio

Supranesteet = makroskooppinen kvantti-ilmiö !
Kondensaatin aaltofunktio (eli systeemin järjestysparametri):

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \psi_0 e^{iS(\boldsymbol{r})}$$

Tästä saadaan johdettua supranesteen nopeus:

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{s} = \frac{\hbar}{m}\nabla S$$

Mistä seuraa:

$$\nabla \times \boldsymbol{v}_\mathrm{s} = 0$$

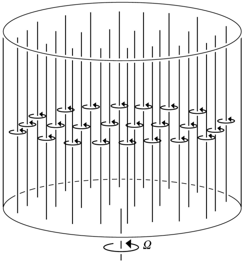
Eli supranestekomponentti on pyörteetön.

Supranesteen pyörteisyys rajoittuu kvantittuneisiin pyörreviivoihin

Lars Onsager ja hänestä riippumatta Richard Feynman esittivät, että supranesteissä voisi esiintyä pyörteisyyttä eräänlaisina topologisina defekteinä. Pian nämä kvantittuneet pyörrevirtaukset eli vorteksit havaittiinkin.

$$\oint \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = n\kappa$$

n on kokonaisluku, ja $\kappa = \frac{2\pi\hbar}{m}$.



Kuva: Pyörivään säiliöön syntyy vortekseja säännölliseen hilaan siten, että supranesteen liike muistuttaa kiinteän kappaleen pyörimistä.

Analogia magneettikenttään on hyödyllinen

$$\oint \boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \kappa$$

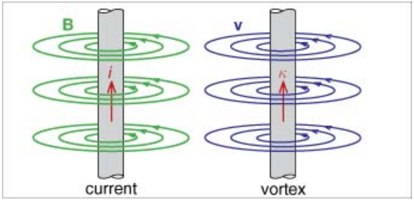
Analogia magneettikenttään on hyödyllinen

Tehdään vertailu viivamaisen johtimen aiheuttamaan magneettikenttään
Ampèren laki:

$\oint \boldsymbol{B} d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I$ $\oint \boldsymbol{v}_s d\boldsymbol{\ell} = \kappa$

Suoran vorteksin/virtajohtimen aiheuttama nopeus-/magneettikenttä:

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ $v = \frac{\kappa}{2\pi r}$



Analogia magneettikenttään

Ampèren laki differentiaalimuodossa:

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} \qquad \nabla \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}$$

Laskiaksemme vorteksin aiheuttaman nopeuskentän paikassa $\boldsymbol{r}$ voimme käyttää Biot'n ja Savartin lakia:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{(\boldsymbol{s}_0 - \boldsymbol{r}) \times \mathrm{d}\boldsymbol{s}_0}{|\boldsymbol{s}_0 - \boldsymbol{r}|^3} \,,$$

missä integrointi vorteksia pitkin ja $\boldsymbol{s}_0$ on piste vorteksilla.

Mallintamisesta

Mallintamiseen voidaan käyttää:

- Biotin ja Savartin lakia lisäämällä logaritminen termi divergoinnin estämiseksi ja ottamalla huomioon supranesteen muu mahdollinen liike.

Mallintamisesta

Mallintamiseen voidaan käyttää:

- Biotin ja Savartin lakia lisäämällä logaritminen termi divergoinnin estämiseksi ja ottamalla huomioon supranesteen muu mahdollinen liike.
- Approksimoimalla pelkällä logaritmisella termillä (LIA, 'local induction approximation').

Mallintamisesta

Mallintamiseen voidaan käyttää:

- Biotin ja Savartin lakia lisäämällä logaritminen termi divergoinnin estämiseksi ja ottamalla huomioon supranesteen muu mahdollinen liike.
- Approksimoimalla pelkällä logaritmisella termillä (LIA, 'local induction approximation').
- Käyttämällä epälineaarista Schrödingerin yhtälöä (Gross-Pitaevskii yhtälö).

Rekonnektiot

Mitä tapahtuu jos kaksi vorteksia törmäävät?

Rekonnektiot

Mitä tapahtuu jos kaksi vorteksia törmäävät?

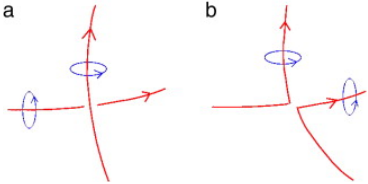
Klassisen Euler nesteen topologia on invariantti.

Rekonnektiot

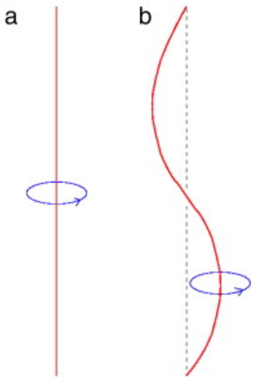
Mitä tapahtuu jos kaksi vorteksia törmäävät?

Klassisen Euler nesteen topologia on invariantti.

Gross-Pitaevskii yhtälön avulla voidaan näyttää, että vorteksit voivat rekonnektoida.



Kelvin aallot



Oma mielenkiintoinen ilmiömaailmansa liittyy kelvin aaltoihin eli yksittäisen vorteksin korkkiruuvimaisiin aaltoihin.
Erityisesti tutkimuksen kohteena on energian siirtyminen matalilta aaltoluvuilta korkeammille.

Klassinen hydrodynamiikka

Klassisessa hydrodynamiikassa keskeisessä asemassa on Navierin-Stokesin yhtälö:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{v}$$

(p on paine ja ν on kinemaattinen viskositeetti)

Klassinen hydrodynamiikka

Klassisessa hydrodynamiikassa keskeisessä asemassa on Navierin-Stokesin yhtälö:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}$$

(p on paine ja ν on kinemaattinen viskositeetti)

Eräs tärkeä suure on Reynoldsin luku: $\frac{UL}{\nu}$ (U on karakteristinen nopeusskaala ja L karakteristinen pituusskaala), joka kuvaa epälineaarisen termin ja dissipatiivisen termin suhdetta.

Turbulenssille tyypillisiä piirteitä

"jatkuvan epästabiiliuden tila"

"What is turbulence ?
Turbulence is like
pornography.
It is hard to define,
but if you see it, you
recognize it
immediately."
(G. K. Vallis, 1999)

Turbulenssille tyypillisiä piirteitä

''jatkuvan epästabiiliuden tila''

- Virtauksen piirre, ei fluidin ominaisuus

''What is turbulence ?
Turbulence is like pornography.
It is hard to define, but if you see it, you recognize it immediately.''

(G. K. Vallis, 1999)

Turbulenssille tyypillisiä piirteitä

"jatkuvan epästabiiliuden tila"

- Virtauksen piirre, ei fluidin ominaisuus
- kaoottisuus ja epäsäännöllisyys, toisaalta tilastolliset ominaisuudet säännöllisiä

"What is turbulence ? Turbulence is like pornography. It is hard to define, but if you see it, you recognize it immediately."

(G. K. Vallis, 1999)

Turbulenssille tyypillisiä piirteitä

"jatkuvan epästabiiliuden tila"

- Virtauksen piirre, ei fluidin ominaisuus
- kaoottisuus ja epäsäännöllisyys, toisaalta tilastolliset ominaisuudet säännöllisiä
- suuri Reynoldsin luku

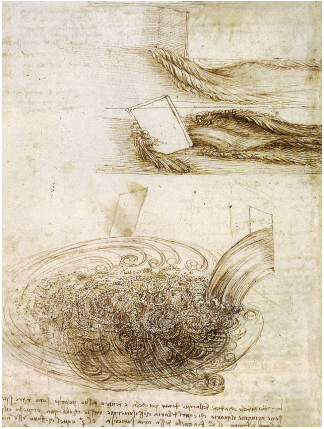
"What is turbulence ? Turbulence is like pornography. It is hard to define, but if you see it, you recognize it immediately."

(G. K. Vallis, 1999)

Turbulenssille tyypillisiä piirteitä

”jatkuvan epästabiiliuden tila”

- Virtauksen piirre, ei fluidin ominaisuus
- kaoottisuus ja epäsäännöllisyys, toisaalta tilastolliset ominaisuudet säännöllisiä
- suuri Reynoldsin luku
- pyörteisyys

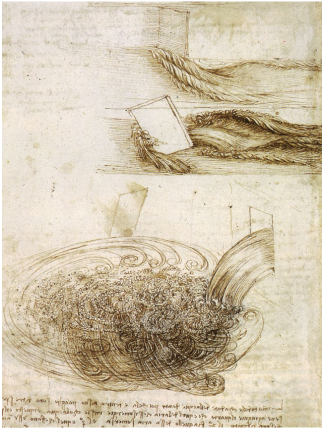


Kuva: Leonardo da Vincin tutkimuksia putoavasta vedestä (n. 1508).

Turbulenssille tyypillisiä piirteitä

”jatkuvan epästabiiliuden tila”

- Virtauksen piirre, ei fluidin ominaisuus
- kaoottisuus ja epäsäännöllisyys, toisaalta tilastolliset ominaisuudet säännöllisiä
- suuri Reynoldsin luku
- pyörteisyys
- vaatii, että systeemiin syötetään energiaa; dissipaatio



Kuva: Leonardo da Vincin tutkimuksia putoavasta vedestä (n. 1508).

Turbulenssia esiintyy joka puolella

Turbulenssi haaste niin insinööreille, fyysikoille kuin matemaatikoillekin.

Turbulenssi esiintyy monissa eri yhteyksissä ja monilla eri skaaloilla.

Tutuimmat esimerkit lienevät turbulenssi lennettäessä, pilvien muodot ja liikkeet ja veden turbulenttinen virtaus. Toisaalta avaruusfysiikassa magnetohydrodynaamisella turbulenssilla on suuri merkitys, kosmologiassa Goldstone-bosonikentän globaalit säikeet ovat esimerkki turbulenssista, maan sulan ytimen turbulentti liike johtaa maan magneettikentän syntyyn jne.

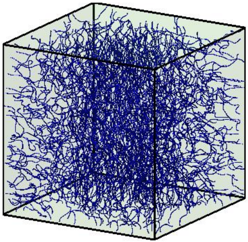
Kvanttiturbulenssi joiltain osin klassista vastinettaan yksinkertaisempi

Klassisessa turbulenssissa virtauspyörteet ovat epävakaita ja sirkulaatio vaihtelee ajan mukaan.

Kvanttiturbulenssi joiltain osin klassista vastinettaan yksinkertaisempi

Klassisessa turbulenssissa virtauspyörteet ovat epävakaita ja sirkulaatio vaihtelee ajan mukaan.

Kvanttiturbulenssi koostuu epäsäännöllisestä vyyhdistä viivamaisia vortekseja. Vorteksit ovat vakaita topologisia defektejä, ja niillä kaikilla on sama sirkulaatio.



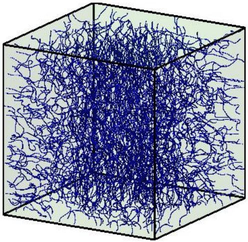
Kuva: Tyypillinen vorteksivyyhti.

Kvanttiturbulenssi joiltain osin klassista vastinettaan yksinkertaisempi

Klassisessa turbulenssissa virtauspyörteet ovat epävakaita ja sirkulaatio vaihtelee ajan mukaan.

Kvanttiturbulenssi koostuu epäsäännöllisestä vyyhdistä viivamaisia vortekseja. Vorteksit ovat vakaita topologisia defektejä, ja niillä kaikilla on sama sirkulaatio.

Monissa tilanteissa supranesteen käyttytyminen muistuttaa klassisen nesteen käyttäytymistä.



Kuva: Tyypillinen vorteksivyyhti.

Energian dissipaatiota nollalämpötilan rajalla ei ymmäretä vielä täysin

Entäpä Reynoldsin luku supranesteille?

$$Re \equiv \frac{UL}{\nu}$$

Energian dissipaatiota nollalämpötilan rajalla ei ymmäretä vielä täysin

Entäpä Reynoldsin luku supranesteille?

$$Re \equiv \frac{UL}{\nu}$$

Jos $\nu \longrightarrow 0$, niin $Re \longrightarrow \infty$. Onko tämä fysikaalisesti mahdollista, ja mitä se tarkoittaa?

Energian dissipaatiota nollalämpötilan rajalla ei ymmäretä vielä täysin

Entäpä Reynoldsin luku supranesteille?

$$Re \equiv \frac{UL}{\nu}$$

Jos $\nu \longrightarrow 0$, niin $Re \longrightarrow \infty$. Onko tämä fysikaalisesti mahdollista, ja mitä se tarkoittaa?

Klassisilla nesteillä energia dissipoituu viskoosisten vuorovaikutusten kautta lämmöksi. Mikä mekanismi voisi mahdollistaa energian dissipaation supranesteille?

Tästä lisää ensi kerralla.

Helppotajuisia artikkeleja aiheesta kiinnostuneille

A. J. Leggett, *Superfluidity*, Rev. Mod. Phys. **71**, S318 (1999).

E. Huggins, *Smoke Ring Physics*, Phys. Teach., **49**, 488 (2011).

V. L'vov ja I. Procaccia, *Turbulence: a universal problem*, Physics World (August 1996).

W. F. Vinen ja R. J. Donnelly, *Quantum turbulence*, Phys. Today **60**, 43 (2007).

S. Fisher ja G. Pickett, *Quantum turbulence*, Physics World (April 2006).

M. S. Paoletti ja D. P. Lathrop, *Quantum Turbulence*, Annu. Rev. Condens.Matter Phys. **2**, 213 (2011).