

# Kemiallinen potentiaali hilaQCD:ssä

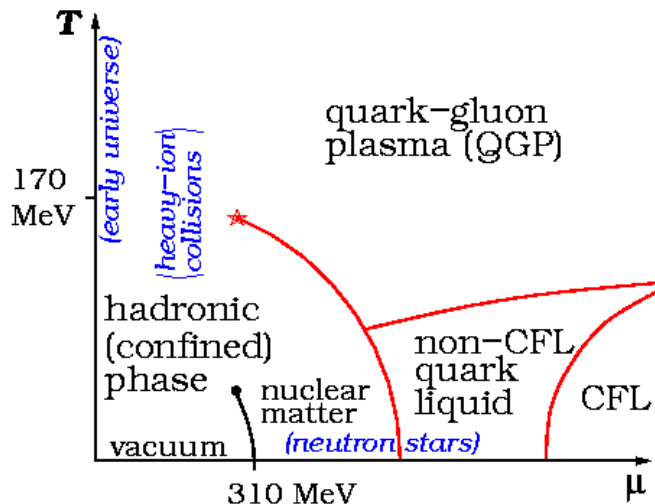
Joni Suorsa

28.4.2011

# Sisältö

- ▶ Motivaatio kemiallisen potentiaalin tutkimiselle
- ▶ Merkkiongelman
- ▶ Svetitskyn-Yaffen konjektuuri
- ▶ Pottsien malli
- ▶ Potts & QCD
- ▶ Swendsen-Wang klusterialgoritmi
- ▶ Kriittisen pisteen paikantaminen
- ▶ Tulokset
- ▶ Yhteenveto

# Motivaatio kemiallisen potentiaalin tutkimiselle



# Merkkiongelman

- ▶ QCD:n partitiofunktion suora simulointi mahdotonta, jos  $\mu \neq 0$

- ▶  $Z = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ - \int d^4x \left[ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \sum_f \bar{\psi}_f (\not{D} + m_f + \gamma_0 \mu_f) \psi_f \right] \right\}$

- ▶ Integroimalla fermionkentät pois saadaan

- ▶  $Z = \int \mathcal{D}A \prod_f \det M(\mu_f) \exp(-S[A])$

# Merkkiongelma

- ▶  $\det M(\mu_f)$  ongelmallinen
- ▶  $M(\mu_f = 0)$   $\gamma_5$ -hermiittinen:  
$$\gamma_5 (\not{D} + m_f) \gamma_5 = -\not{D} + m_f = (\not{D} + m_f)^\dagger$$
- ▶  $\rightarrow \det M(\mu_f = 0) = \det M(\mu_f = 0)^\dagger$
- ▶  $\det M(\mu_f = 0)$  reaalinen, voidaan käyttää todennäköisyyspainokertoimena simuloitaessa

# Merkkiongelman

- ▶ Jos  $\mu_f \neq 0$ ,  $\gamma_5$ -hermiittisyys, sekä reallisuus katoavat
- ▶  $\gamma_5 (\not{D} + m_f + \gamma_0 \mu_f) \gamma_5 = -\not{D} + m_f - \gamma_0 \mu_f \neq (\not{D} + m_f + \gamma_0 \mu_f)^\dagger$
- ▶ Seurauksena  $\det M(\mu_f)$  kompleksinen, todennäköisyystulkinta ei toimi

# Merkkiongelma

- ▶ Merkkiongelma koitettu kiertää eri metodein
- ▶  $\mu \rightarrow i\mu$ , analyyttinen jatkaminen
- ▶ Glasgown metodi:  $Z = \left\langle \frac{|M(\mu)|}{|M(\mu=0)|} \right\rangle_{\mu=0}$
- ▶ .. ei kuitenkaan toimi riittävän hyvin.  $\mu \neq 0$  tilanteelle hyödyllisiä konfiguraatioita syntyy todennäköisyydellä  $P \propto \exp(-\text{vakio} \times V)$ , ekstrapolointi äärettömään tilavuuteen vaikeaa
- ▶ Toinen yrite: jaetaan  $\det M$  osiin  $|\det M|e^{i\phi}$  ja luodaan konfiguraatioita ilman kompleksista vaihetekijää, sisällyttäen tämän observaabeleihin  $\mathcal{O} = \frac{\langle \mathcal{O}e^{i\phi} \rangle_{|M|}}{\langle e^{i\phi} \rangle_{|M|}}$
- ▶ .. lakkaa toimimasta kriittisen alueen lähimaastossa vaihetekijän fluktuaation aiheuttamien kumoutumisien vuoksi

# Svetitskyn-Yaffen konjektuuri

- ▶ Konjektuuri yhdistää  $d + 1$  ulotteisen mittakentän  $G$  hilakenttäteorian vangitseva-vapaa faasitransition  $d$  ulotteisen spin-mallin  $\mathcal{C}_G$  symmetriarikon faasitransitioon
- ▶ Mallien kriittisen käyttäytymisen voidaan osoittaa olevan samat, eli mallit kuuluvat samaan universaalisuusluokkaan
- ▶ Konjektuurin mukaan 4-ulotteista  $SU(3)$ :a voidaan tutkia käyttämällä 3-ulotteista 3-tilaista spin-mallia

# Potts malli

- ▶ 3-ulotteinen 3-tilainen spin-malli
- ▶  $\Phi(x) = e^{in2\pi/3}$ ,  $n = 0, 1, 2$
- ▶  $H = -\kappa \sum_{i, \vec{x}} \delta_{\Phi(\vec{x}), \Phi(\vec{x}+i)} - \sum_{\vec{x}} [h\Phi(\vec{x}) + h'\Phi^*(\vec{x})]$
- ▶ Muuttujat  $h, h'$  voidaan samaistaa helposti QCD:n muuttujiin
- ▶ Jos  $h \neq h'$ , Hamiltonin funktio on kompleksinen

- ▶ Kirjoitetaan QCD:n partitiofunktio suurkanonisessa ensemblessä  $n$ :lle staattiselle kvarkille ja  $\bar{n}$ :lle staattiselle antikvarkille:

- ▶  $Z(\mu) =$

$$\sum_{n, \bar{n}} \int \mathcal{D}U \frac{1}{n!} \Phi[U]^n \frac{1}{\bar{n}!} \Phi^*[U]^{\bar{n}} e^{-S_g[U] - \beta n(M - \mu) - \beta \bar{n}(M + \mu)}$$

- ▶  $= \int \mathcal{D}U \exp \left\{ -S_g[U] + e^{-\beta(M - \mu)} \Phi[U] + e^{-\beta(M + \mu)} \Phi^*[U] \right\}$

- ▶  $U \in SU(3)$ ,  $\Phi[U]$  on Polyakov-viiva ja  $\Phi^*[U]$  anti-Polyakov-viiva

# Potts & QCD

- ▶ Vertaamalla Pottsinn mallin partitiofunktioon, saadaan samaistettua Pottsinn mallin muuttujat  $h$  ja  $h'$  QCD:n parametreihin

- ▶  $Z_{QCD}(\mu) = \int \mathcal{D}U \exp \left\{ -S_g[U] + e^{-\beta(M-\mu)} \Phi[U] + e^{-\beta(M+\mu)} \Phi^*[U] \right\}$

- ▶  $Z_{Potts}(h, h') = \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ -\kappa \sum_{i, \vec{x}} \delta_{\Phi(\vec{x}), \Phi(\vec{x}+i)} - \sum_{\vec{x}} [h\Phi(\vec{x}) + h'\Phi^*(\vec{x})] \right\}$

- ▶ Saadaan  $h = e^{-\beta(M-\mu)}$ ,  $h' = e^{-\beta(M+\mu)}$ , kompaktimmin  $h = h_M e^{\bar{\mu}}$ ,  $h' = h_M e^{-\bar{\mu}}$ ,  $h_M = e^{-M\beta}$ ,  $\bar{\mu} = \mu\beta$
- ▶ QCD:n mittakenttävaikutusfunktion aseman ottaa Pottsinn mallin lähinaapurivuorovaikutustermi, ja Polyakov-viivojen roolin  $Z(3)$ -spinit

# Swendsen-Wang klusterialgoritmi

- ▶ Jotta Pottsian mallin vaikutusfunktio saataisiin reaalisiksi, on tehtävä muuttujanvaihdos
- ▶ Samansuuntaisten spinien välille asetetaan kytkös tietyllä todennäköisyydellä
- ▶ Kytkettyjen spinien joukkoa kutsutaan klusteriksi
- ▶ Formuloidaan partitiofunktio kytkösten ja klusterien avulla spinien sijaan

# Swendsen-Wang klusterialgoritmi

- ▶ Lähinaapurivuorovaikutustermi korvataan termillä joka kuvaa lähinaapurien kytköksiä

- ▶ 
$$\exp(\delta_{\Phi(\vec{x}), \Phi(\vec{x}+i)}) = \sum_{b=0,1} [\delta_{b,1} \delta_{\Phi(\vec{x}), \Phi(\vec{x}+i)} (e^{\kappa} - 1) + \delta_{b,0}]$$

- ▶  $h, h'$  riippuvainen osa jaetaan klusterien kontribuutioiden tuloksi, ja esitetään  $3^{N_c}$ :n yhtä todennäköisen spinikonfiguraation odotusarvona

- ▶ 
$$\exp \left[ \sum_{\vec{x}} (h\Phi(\vec{x}) + h'\Phi^*(\vec{x})) \right] = \prod_{\mathcal{C}} \exp \left[ \sum_{\vec{x} \in \mathcal{C}} (h\Phi(\vec{x}) + h'\Phi^*(\vec{x})) \right]$$

# Swendsen-Wang klusterialgoritmi

$$\begin{aligned} \text{▶ } \left\langle \exp \left[ \sum_{\vec{x}} (h\Phi(\vec{x}) + h'\Phi^*(\vec{x})) \right] \right\rangle_{3^{N_C}} &= \\ \prod_C \left\langle \exp \left[ \sum_{\vec{x} \in C} (h\Phi(\vec{x}) + h'\Phi^*(\vec{x})) \right] \right\rangle_3 \end{aligned}$$

▶ Yksittäisen klusterin odotusarvo on

$$\text{▶ } \left\langle \exp \left[ \sum_{\vec{x} \in C} (h\Phi(\vec{x}) + h'\Phi^*(\vec{x})) \right] \right\rangle_3$$

$$\text{▶ } = \frac{1}{3} \sum_{\Phi \in \mathbb{Z}(3)} \exp(h|C|\Phi + h'|C|\Phi^*)$$

$$\text{▶ } = \frac{1}{3} \left[ e^{(|C|(h+h'))} + 2e^{(-\frac{1}{2}|C|(h+h'))} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|C|(h-h')\right) \right]$$

$$\text{▶ } \equiv W(C)$$

# Swendsen-Wang klusterialgoritmi

- ▶ Lopulliseksi muodoksi saadaan

- ▶ 
$$Z = \int \mathcal{D}b (e^\kappa - 1)^{N_b} 3^{N_c} \prod_C W(C)$$

- ▶ 
$$= \int \mathcal{D}b (e^\kappa - 1)^{N_b} \prod_C \left[ e^{2h_M |C| \cosh \bar{\mu}} + 2e^{-h_M |C| \cosh \bar{\mu}} \cos \left( \sqrt{3} h_M |C| \sinh \bar{\mu} \right) \right]$$

- ▶ Reaalinen ja positiivinen, eli voidaan käyttää todennäköisyyspainokertoimena

# Kriittisen pisteen paikantaminen

- ▶ Simulaatiot suoritettiin kolmella eri hilakoolla:  $50^3$ ,  $60^3$  ja  $72^3$
- ▶ Jokaisella hilakoolla kerättiin 2 miljoonaa mittausta kriittisen pisteen läheltä
- ▶ Simulaatiot suoritettiin  $h = h'$  parametriviivaa käyttäen, ja mittaustulokset uudelleenpainotettiin mielivaltaiselle  $h, h'$
- ▶ Uudelleenpainotus fantastinen apuväline: vaikka simulaatiot suoritetaan kiinnitetyillä parametrien arvoilla, on mahdollista tutkia parametriavaruutta näiden lähellä ilman uusien simulaatioajojen suorittamista

# Kriittisen pisteen paikantaminen: uudelleenpainotus

- ▶ Ajettu Monte Carlo -simulaatio ja saatu konfiguraatioita  $\phi_1 \dots \phi_N$ , ja mittauksia observaabelista  $O_i = O(\phi_i)$

- ▶ Odotusarvo on  $\langle O \rangle \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N O_i$

- ▶ Simulaatiot ajettu parametrin arvolla  $g_0$ , halutaan uudelleenpainottaa mittaukset parametrin arvoon  $g$

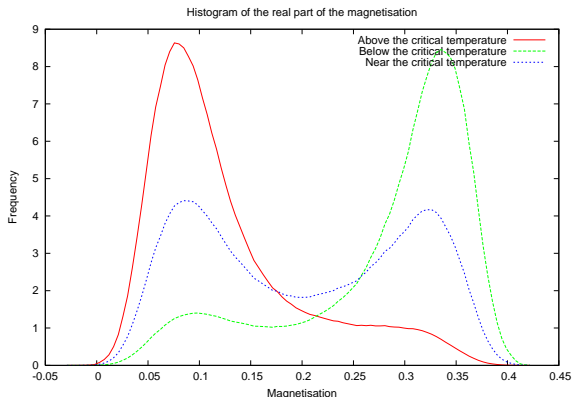
- ▶ 
$$\langle O \rangle_g = \frac{\sum_{i=1}^N O_i e^{-(S[g, \phi_i] - S[g_0, \phi_i])}}{\sum_{i=1}^N e^{-(S[g, \phi_i] - S[g_0, \phi_i])}}$$

- ▶ Uudelleenpainotuksella rajansa äärellisen statistiikan vuoksi

# Kriittisen pisteen paikantaminen

- Kriittinen piste paikannettiin tutkimalla

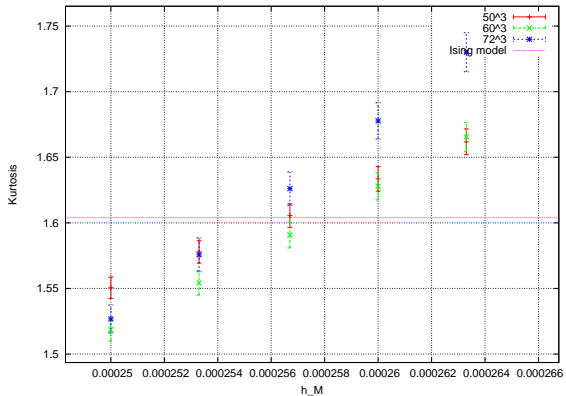
magnetoitumajakauman reaaliosan vinoumaa,  $B_3 = \frac{\langle M^3 \rangle}{\langle M^2 \rangle^{3/2}}$ ,  
etsimällä piste, jossa vinouma häviää.



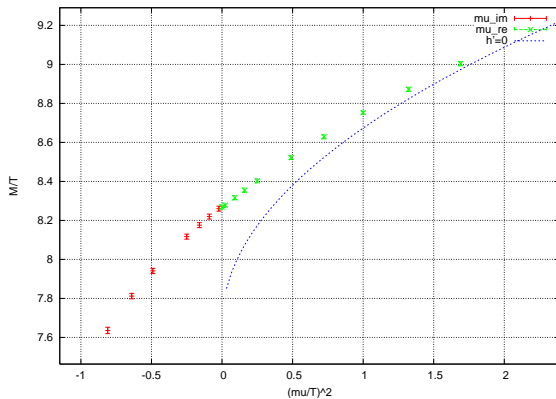
# Kriittisen pisteen paikantaminen

- ▶ Vinouman nollakohdassa laskettiin jakauman huipukkuus,  $B_4 = \frac{\langle M^4 \rangle}{\langle M^2 \rangle^2}$ , jonka arvo on Potts'n mallin universaalisuusluokan perusteella kriittisessä pisteessä 1.604
- ▶ Eri hilakoilla huipukkuus käyttäytyy eri tavalla  $h$ :n funktiona, mutta käyrät leikkaavat yhdessä kohtaa

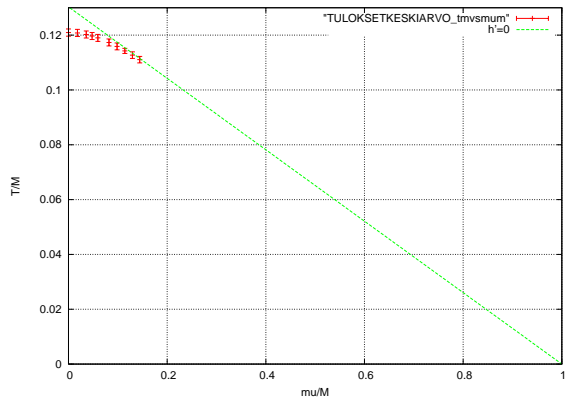
# Kriittisen pisteen paikantaminen



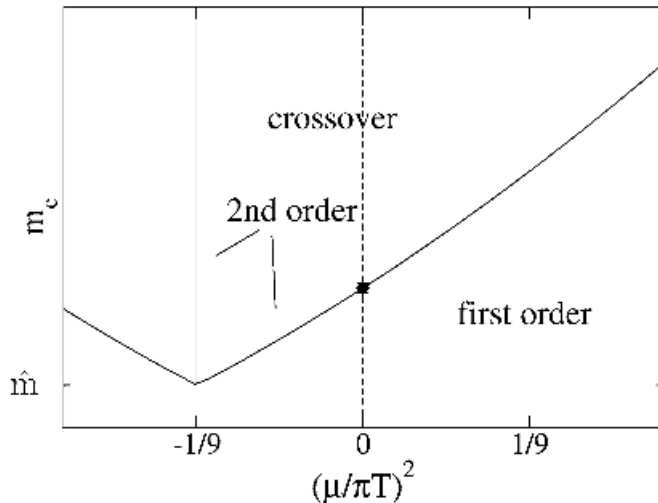
# Tulokset



# Tulokset



# Tulokset



- ▶ Ph. de Forcrand & O. Phillipsen Nucl. Phys. B673

# Yhteenveto

- ▶ QCD:n suora simulointi mahdotonta jos  $\mu \neq 0$
- ▶ Monenlaisia yrityksiä ongelman kiertämiseksi
- ▶ Svetitskyn-Yaffen konjektuuri mahdollistaa yksinkertaisen spinimallin, Pottsian mallin käyttämisen faasiavaruuden tutkimiseen
- ▶ Kemiallisen potentiaalin mukaan ottaminen aiheuttaa ensimmäisen kertaluvun transition heikkenemisen
- ▶ Raskaiden kvarkkien tapauksessa kemiallisen potentiaalin kasvatus vaikuttaa transitoihin: 1.kl.  $\rightarrow$  2.kl.  $\rightarrow$  cross-over
- ▶ Kevyiden kvarkkien tapauksessa cross-over  $\rightarrow$  2.kl.  $\rightarrow$  1.kl. (ehkä)
- ▶ Analyttinen jatkaminen tuntuu toimivan hyvin