Tsallisin entropia

Syventävien opintojen seminaari 18.11.2010

Aki Kutvonen

- Boltzmann-Gibbs (BG) -entropian yleistys muun muassa epätasapainotiloihin
- Useiden mielenkiintoisten systeemien olosuhteet eivät täytä BG-statistiikan vaatimuksia

$$\int \frac{\delta Q}{T} \geq 0$$

$$S_q(p) = \frac{1}{q-1}\left(1 - \sum_x p^q(x)\right).$$

$$S = k_B \ln \Omega$$

BG-statistiikka 1/2

- Entropia ja siis myös energia ovat ekstensiivisiä suureita
- Systeemi on tasapainotilassa, tai ainakin lähellä sitä
- Ergodisuus voimassa
- Ylläolevilla ehdoilla entropia maksimoituu

Postuloidaan entropiat:

Mikrokanoninen joukko:

$$S_B = k_B \ln(W), \; p_i = \frac{1}{W}$$

Kanoninen joukko:

$$S_{BG} = -k_b \sum_i^W p_i \ln(p_i)$$

$$P(i \cap j) = P(i) P(j|i) = P(i) P(j)$$

$$\downarrow$$

$$p_i = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

BG-statistiikka 2/2

- Odotusarvot laskettavissa

- Legendren muunnoksilla saadaan vapaat energiat, jotka maksimoituvat toisen pääsäännön määräämällä tavalla

- Homma paketissa

Mutta entä jos systeemissä on:

- Pitkän kantaman vuorovaikutuksia
  - Integraalit divergoivat, energia ei ole ekstensiivinen
- Systeemi ei ole tasapainotilassa
  - Lämpötila?
  - Alunperin oletettiin tasapainotila
- Ergodisuus ei voimassa
  - Esim. edellämainitut ja muistiefektit aiheuttavat tämän

- Suureet kuten lämpökapasiteetti usein kuitenkin mitattavissa

Tsallisin entropia

- BG-entropian yleistys

$$S_q = \frac{1}{1-q} \left[\sum_{i=1}^{W} (p_i)^q - 1 \right]$$

- Aikaisemmin: $$S_{BG}(A+B) = S_{BG}(A) + S_{BG}(B)$$

- Mutta nyt: $$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (q-1) S_q(A) S_q(B)$$

- Parametri q on systeemin epäekstensiivisyyden mitta ja

$$\lim_{q \to 1} S_q = S_{BG}$$

Yleistetty termostatistiikka

- Halutaan yleistää BG-statistiikkaa Tsallisin entropian avulla

- Yleistetään eksponentti- ja logaritmifunktio:

$$e_q^{(x)} \equiv [1-(1-q)x]^{\frac{1}{1-q}} \qquad \ln_q^{(x)} \equiv \frac{x^{1-q}-1}{1-q} \qquad e_q^{\ln_q(x)} = x$$

- Todennäköisyysjakaumaksi saadaan: $p_i = \frac{1}{Z_q} e_q^{\frac{-E_i}{k_B T}}$

- Legendren muunnoksista johdetut tulokset ovat q-invariantteja:

$$U_q = \frac{-\partial}{\partial \beta} Z_q \qquad C_q = -T \frac{\partial^2 F_q}{\partial T^2} \qquad F_q = U_q - T S_q \qquad \text{jne.}$$

Sovellutuksia

- Esimerkiksi systeemit, joissa esiintyy gravitaatio pitkän matkan vuorovaikutuksena
  - Plasmaoskillaatiot
  - Aurinkotuulet
  - Matalan lämpötilan kaasut
- Värillisen kohinan systeemit
- Taloustieteessä, käyttäytymistieteissä, informaatiotieteissä
- Jne.

- q-invariantteja tuloksia
  - Langevinin yhtälö
  - Fokker-Planck
  - Mustan kappaleen säteily
  - jne.