

Katoavaisen sähkömagneettisen kentän koherenssiteoriaa

Andreas Norrman

Teoreettisen fysiikan syventävien opintojen seminaari

22.4.2010

Esitelmän rakenne

- Sähkömagneettinen kenttä
- Katoavainen kenttä
- Sähkömagneettinen koherenssiteoria
- Katoavaisen kentän koherenssiominaisuuksia

Sähkömagneettinen kenttä

- Maxwellin yhtälöt:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t), \quad \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t),$$

- Reunaehdot:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot [\mathbf{D}_2(\mathbf{r}, t) - \mathbf{D}_1(\mathbf{r}, t)] &= \rho_s(\mathbf{r}, t), & \mathbf{n} \times [\mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) - \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)] &= 0, \\ \mathbf{n} \cdot [\mathbf{B}_2(\mathbf{r}, t) - \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t)] &= 0, & \mathbf{n} \times [\mathbf{H}_2(\mathbf{r}, t) - \mathbf{H}_1(\mathbf{r}, t)] &= \mathbf{j}_s(\mathbf{r}, t), \end{aligned}$$

- Rakenneyhtälöt:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 [\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)].$$

- Fourier'n muunnos: $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$

- Maxwellin yhtälöt *avaruus-taajuus* tasossa:

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \tilde{\rho}(\mathbf{r}, \omega), \quad \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega),$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad \nabla \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) + \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega),$$

- Lineaarinen, isotrooppinen ja homogeeninen väliaine:

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega), \quad \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \mu_r(\omega) \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega),$$

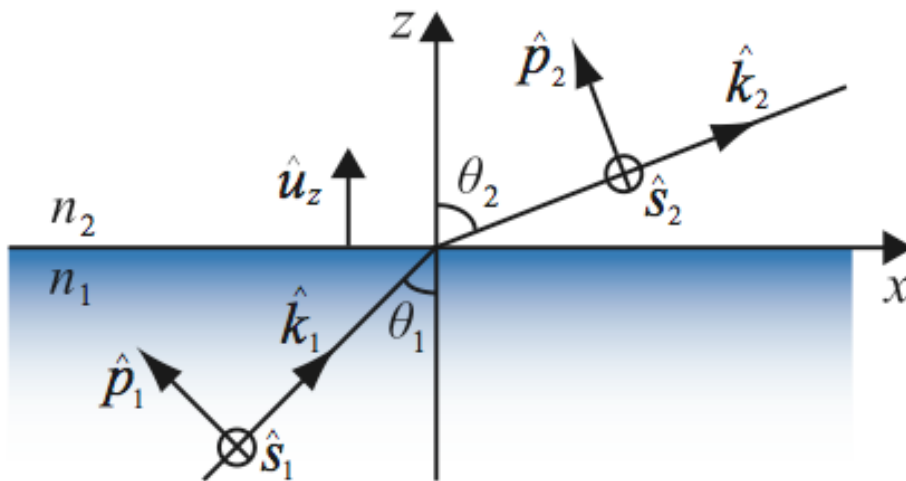
- Aaltoyhtälöt:

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mu_0 \mu_r \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega)$$

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega) \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) = \nabla \times \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega)$$

Katoavainen kenttä

- Kun etenevä aalto saapuu kahden aineen rajapinnalle tapahtuu heijastumista sekä taittumista.
- Tietyllä tulokulmalla (*kriittinen kulma*) etenevä aalto kokonaisuudessaan heijastuu, jolloin katoavainen kenttä syntyy pinnan yläpuolelle.
- *Kriittinen kulma*: $\theta_c = \arcsin(n_2 / n_1)$



$$\theta_1 > \theta_c!$$

$$n_1 > n_2!$$

- Eristeessä $\mathbf{j}(\mathbf{r},\omega) = \rho(\mathbf{r},\omega) = 0$.
- Optisilla taajuuksilla $\mu_r(\omega) \approx 1$.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega) = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \theta_1 + \gamma^2}} \begin{pmatrix} -i\gamma t_p E_p \\ \sqrt{\sin^2 \theta_1 + \gamma^2} t_s E_s \\ \sin \theta_1 t_p E_p \end{pmatrix} e^{k_1(i \sin \theta_1 x - \gamma z)}$$

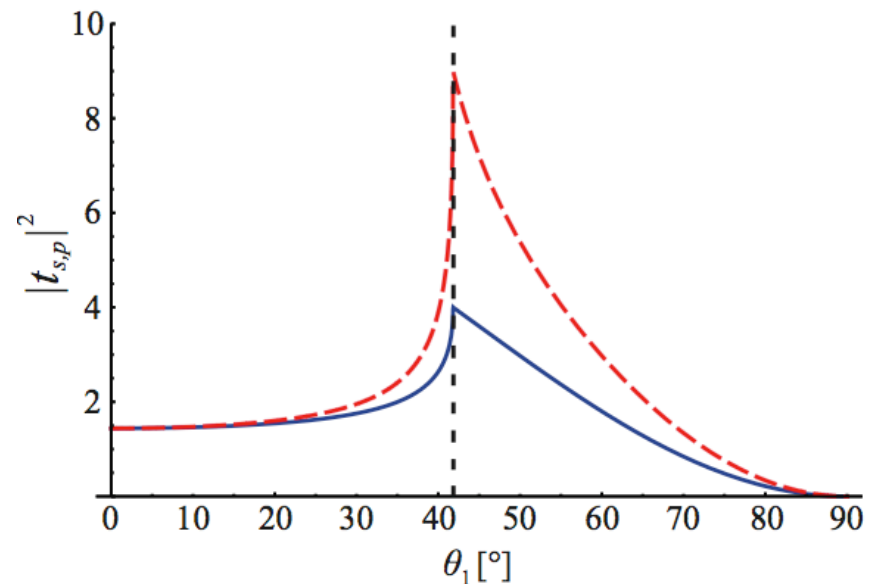
$$\gamma \equiv n_{12}^{-1} \sqrt{(n_{12} \sin \theta_1)^2 - 1}$$

$$n_{12} \equiv n_1 / n_2$$

- Fresnel-kertoimet:

$$t_s = \frac{2 \cos \theta_1}{\cos \theta_1 + i\gamma}$$

$$t_p = \frac{2n_{12} \cos \theta_1}{\cos \theta_1 + in_{12}^2 \gamma} \sqrt{2n_{12}^2 \gamma^2 + 1}$$



- Ominaisuuksia
 - Aaltovektorin z -komponentti on puhtaasti imaginaarinen.
 - Kentän amplitudi vaimenee eksponentiaalisesti siirryttäessä pinnasta poispäin.
 - Mitä suurempi on tulokulma, sitä voimakkaampaa on vaimeneminen.
 - Kenttä ei kuljeta energiaa z -akselin suuntaan (Poyntingin vektori).
- Mielenkiintoisia ominaisuuksia
 - Pinnan suunnassa kenttä etenee sekä kuljettaa energiaa.
 - Kenttä voi olla hyvin voimakas pinnan läheisyydessä.
 - Pinnan suunnassa etenevän aallon aallonpituus on aina lyhyempi kuin pinnan yläpuolella oleva aallonpituus.

$$\Lambda = \frac{\lambda_2}{n_{12} \sin \theta_1}, \quad \frac{\lambda_2}{n_{12}} \leq \Lambda \leq \lambda_2.$$

Sähkömagneettinen koherenssiteoria

- Jokaiseen luonnossa esiintyvään sähkömagneettiseen kenttään liittyy *fluktuaatioita*.
- Nämä fluktuaatiot ovat (yleensä) liian nopeita suoraan havaittaviksi.
- Fluktuaatioihin liittyy aina *satunnaisuutta*.
- Kyseisten fluktuaatioiden käsittelemiseksi tarvitaan tilastollisia menetelmiä.

- Odotusarvo: $\langle x(t) \rangle = \int xp(x,t)dx, \quad \int p(x,t)dx = 1.$
- Todennäköisyystiheys $p(x,t)$ ei sisällä mitään tietoa esim. mahdollisista *korrelaatioista* kahtena eri ajanhetkenä.
- Tarvitaan 2-kertaista todennäköisyystiheyttä $p_2(x_2,t_2;x_1,t_1).$
- Autokorrelaatiofunktio:

$$\Gamma(t_1,t_2) \equiv \langle x_1(t_1)x_2(t_2) \rangle = \int x_1x_2p_2(x_2,t_2;x_1,t_1)dx_1dx_2.$$

- Prosessi on tilastollisesti *stationaarinen*, jos satunnaismuuttujiin liittyvien fluktuaatioiden luonne ei muutu ajallisesti:

$$p_n(x_n,t_n;x_{n-1},t_{n-1};\dots;x_1,t_1) = p_n(x_n,t_n + T;x_{n-1},t_{n-1} + T;\dots;x_1,t_1 + T).$$

- ***Koherenssi*** sisältää kaiken tiedon kentän fysikaalisten suureiden korrelaatioista.
- Satunnaisesti fluktuoivan sähkömagneettisen kentän korrelaatioominaisuuksia karakterisoi ns. ***koherenssimatriisit***.
- ***Risti-spektri-tiheysmatriisi*** kuvaa kentän komponenttien välisiä korrelaatioita kahdessa pisteessä.

$$W_{ij}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \langle E_i^*(\mathbf{r}_1, \omega) E_j(\mathbf{r}_2, \omega) \rangle, \quad (i, j) = (x, y, z).$$

- ***Polarisaatiomatriisi*** kuvaa kentän komponenttien välisiä korrelaatioita yhdessä pisteessä:

$$\phi_{ij}(\mathbf{r}, \omega) = W_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega).$$

- **3D-polarisaatioaste** karakterisoi kentän komponenttien välisten korrelaatioiden vahvuutta yhdessä pisteessä:

$$P_3^2(\mathbf{r}, \omega) = \frac{3}{2} \left[\frac{\text{tr} \Phi^2(\mathbf{r}, \omega)}{\text{tr}^2 \Phi(\mathbf{r}, \omega)} - \frac{1}{3} \right], \quad 0 \leq P_3(\mathbf{r}, \omega) \leq 1.$$

- Tasoaallolle: $1/2 \leq P_3(\mathbf{r}, \omega) \leq 1$.
- **Sähkömagneettinen koherenssiaste** karakterisoi kentän komponenttien välisten korrelaatioiden vahvuutta kahdessa pisteessä:

$$\mu_{\text{EM}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) = \frac{\|\mathbf{W}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega)\|_F}{\sqrt{\text{tr} \Phi(\mathbf{r}_1, \omega) \text{tr} \Phi(\mathbf{r}_2, \omega)}}, \quad 0 \leq \mu_{\text{EM}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega) \leq 1.$$

- **Koherenssipituus** on etäisyys kahden pisteen välillä, jolla koherenssiaste “putoaa huomattavasti”.

Katoavaisen kentän koherenssiominaisuuksia

- Johdettiin lausekkeet polarisaatio- ja koherenssiasteelle kentälle, joka koostuu katoavaisten aaltojen superpositiosta.
- Tilanteita, jossa kenttä on puhtaasti s - tai p -polaroitu tai sisältää molemmat komponentit, tutkittiin erikseen analyttisesti sekä numeerisesti.
- Erityisesti tutkittiin kyseisten kenttien koherenssipituuksia ja osoitettiin, että koherenssipituus voi olla huomattavasti lyhyempi kuin aallonpituus rajapinnan yläpuolella.

- Yhden aallon tapaus

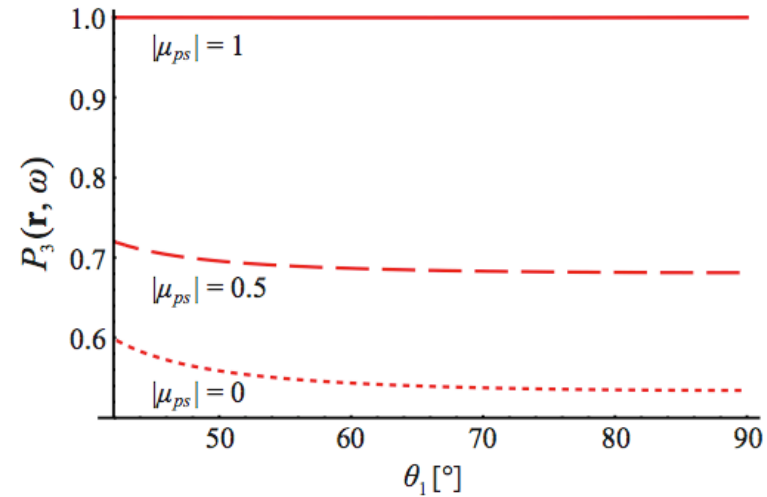
$$\mu_{\text{EM}}(\omega) = \sqrt{1 + 2\alpha},$$

$$P_3(\omega) = \sqrt{1 + 3\alpha},$$

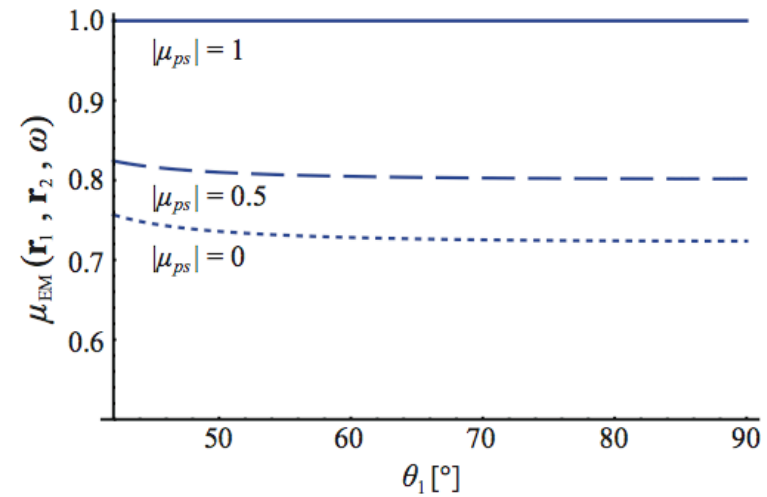
$$\alpha \equiv \frac{\left(|\mu_{ps}|^2 - 1\right) |t_s|^2 |t_p|^2 |E_s|^2 |E_p|^2}{\left(|t_s|^2 |E_s|^2 + |t_p|^2 |E_p|^2\right)^2}.$$

$$P_3^2(\omega) - \mu_{\text{EM}}^2(\omega) = \alpha,$$

$$P_3(\omega) \leq \mu_{\text{EM}}(\omega).$$

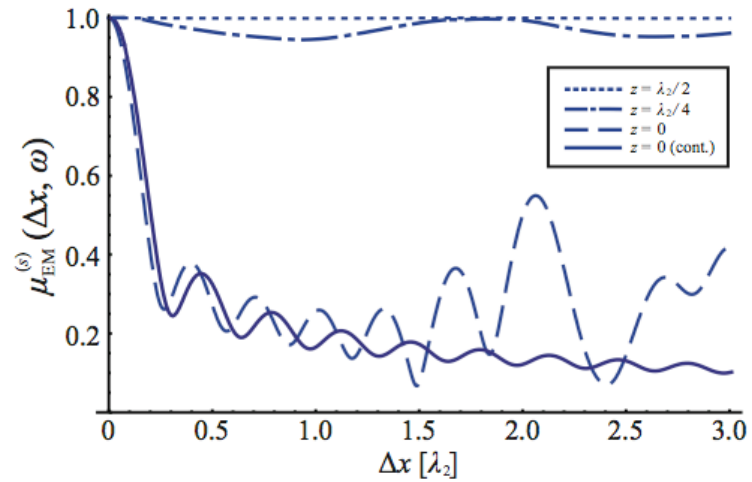


(a)

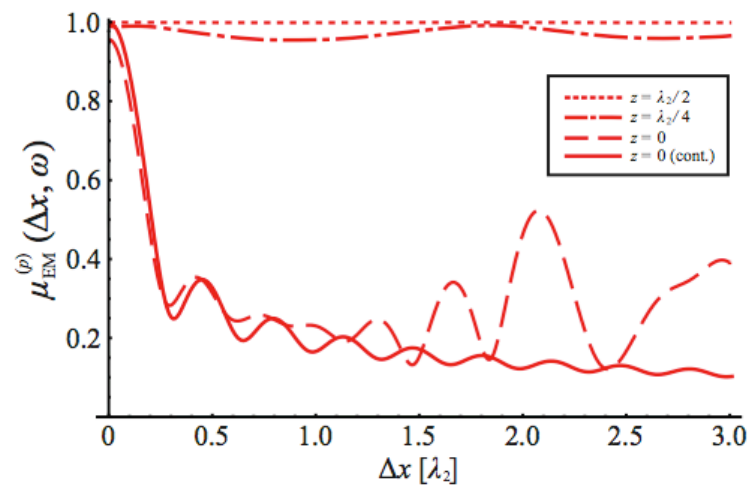


(b)

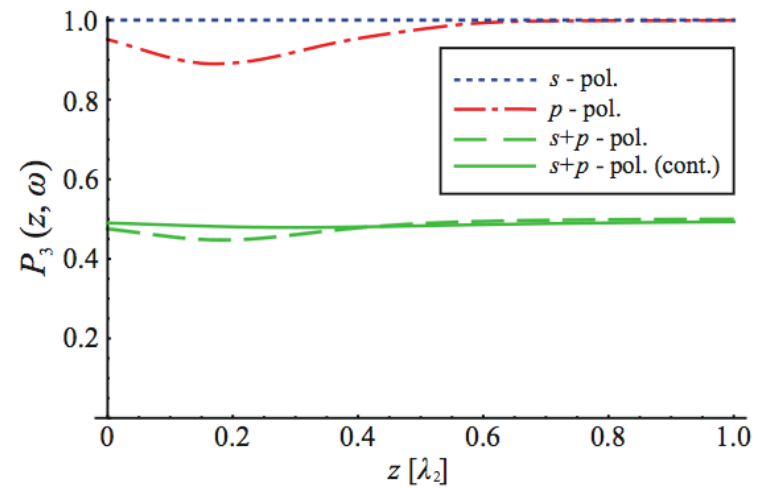
- Useamman aallon tapaus



(a)



(b)



- Kahden aallon tapaus

- Edellä esitetyt tulokset viittaavat siihen, että lyhyimmät koherenssipituudet esiintyvät pinnan välittömässä läheisyydessä.
- Kahden (korreloimattoman) tulevan aallon synnyttämän kentän koherenssipituuksia tutkittiin analyttisesti.

- Koherenssipituus:
$$l_{\text{coh}} = \frac{\lambda_2}{2n_{12}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)}, \quad \theta_2 > \theta_1.$$

- Ehto: $2n_{12}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) > 1.$

- Esim. lasi-ilma: $l_{\text{coh}} \approx \lambda_2$, pii-ilma: $l_{\text{coh}} \approx \lambda_2/6.$