

## Kaaosteoriaa

Tähän mennessä tutkittu pääasiassa integroituvia systeemejä.

- Liikkeyhtälön ratkaisun voi esittää suljetussa muodossa
- Esim. keskeisliike (2 kpl:een ongelma)

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U(r) - l^2/2mr^2}},$$

hyrräliike

$$t - t_0 = - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{2I_1^0(1-u^2)(E - \frac{L_3^2}{2I_3} - mghu) - (L_{x_3} - L_3u)^2}},$$

- Integroituvuus ei siis tarkoita sitä, että ratkaisun voi esittää eksplisiittisesti alkeisfunktioiden avulla!

Törmäsimme myös muutama ei-integroituvaan systeemiin

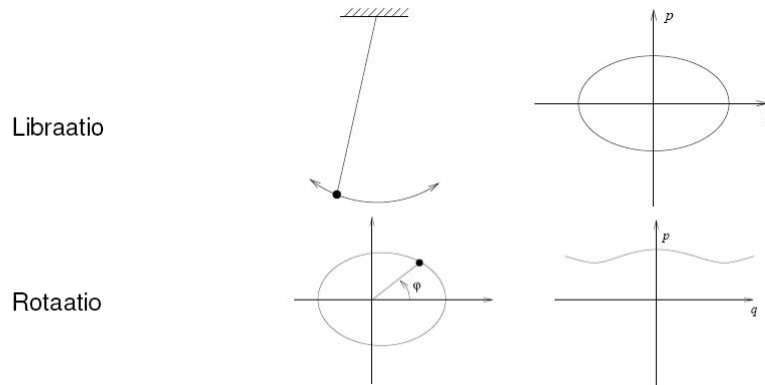
- 3 (tai useamman) kpl:een ongelma
- epälineaariset oskillaattorit, esim. van der Pol
- planeettaliikkeen häiriöt ↔ kanoninen häiriöteoria

Kaoottiset systeemit

- deterministisiä, mutta herkkiä alkuarvoille ("perhosefekti")
- epälineaariset 1. kl. yhtälöt, 3 tai useampia muuttujia

**KAAOS EI OLE SAMA ASIA KUIN STOKASTISUUS TAI SATUNNAISUUS!**

## Kertausta: Periodinen liike



Hamilton-Jacobi:  $P_i = \alpha_i$  integroimisvakioita. Merk.  $\alpha = \{\alpha_i\}$   
 → vaikutusmuuttujat (action variables)  $J_i = J_i(\alpha)$ ,  $J = \{J_i\}$

Määr:

$$J_i = \oint p_i dq_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\begin{cases} J_i = \oint p_i dq_i & \text{liikevakioita} \\ w_i = \nu_i t + \beta_i \end{cases}$$

Ol.  $H = H(q, p)$   $q \equiv \{q\}$  ja  $p \equiv \{p\}$  rajoitettuja.

Tehdään kanoninen muunnos  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$  s.e.  $K = K(P)$  ( $Q$ :t syklisiä)

$$\Rightarrow \begin{aligned} P\text{:t liikevakioita ja} & \quad Q_i = w_i(t) = \omega_i t + \beta_i \\ & \quad P_i = \alpha_i \end{aligned}$$

Muunnoksen generoi siis  $W(q; \alpha)$ , jolle  $H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) = \alpha_1$

Jos tällainen kanoninen muunnos on olemassa, systeemi on integroitava

Tiedetään:  $\exists$  harmoniselle oskillaattorille

Kääntäen: Jos kyseiset muuttujat olemassa, systeemi voidaan muuntaa joukoksi harmonisia oskillaattoreita

## Kaksiulotteinen tapaus

$$H = \underbrace{\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{1}{2}m_1\omega_1^2q_1^2}_{= H_1} + \underbrace{\frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{1}{2}m_2\omega_2^2q_2^2}_{= H_2}$$

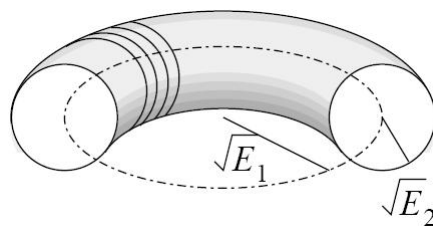
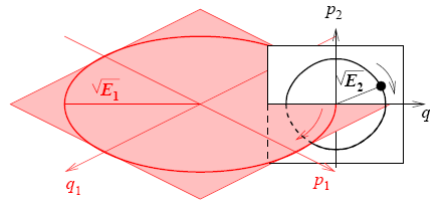
eli  $H$  kuvaa kahta kytkeytymätöntä harmonista oskillaattoria

$$H_1 = \frac{J_1\omega_1}{2\pi} = E_1; \quad H_2 = \frac{J_2\omega_2}{2\pi} = E_2$$

Skaalataan muuttujat sopivasti  $p_i \rightarrow p'_i/\sqrt{2m_i}; q_i \rightarrow q'_i\sqrt{m_i\omega_i^2/2}$

$$\Rightarrow E_i = p_i'^2 + q_i'^2$$

4D faasiavaruus,  
rata visualisoitavissa  
2D toruksen pinnalla.



Jos  $\omega_2/\omega_1 \in \mathbb{Q}$ ,  
rata sulkeutuu

jos  $(\omega_2/\omega_1)^{\pm 1} \in \mathbb{N}$   
se sulkeutuu jo yhden  
kierroksen jälkeen.

Jos  $\omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{Q}$ , niin rata ei sulkeudu ja sanotaan, että taajuudet  
ovat **yhteismitattomat**.

Tällöin liike täyttää lopulta koko toruksen pinnan

## KAM-teoreema

Kolmogorov-Arnold-Moser

Integroitumaton systeemi  $\rightarrow$  kanoninen häiröteoria.

Esim. planeettakunta: 
$$\Delta H = - \sum_i \frac{GM_i m}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_i|}$$

Onko ennuste luotettava?

Oletetaan:

- rajoitettu liike,  $H_0$  integroituva
- pieni  $\Delta H$  muuttaa  $H = H_0 + \Delta H$  :n integroitumattomaksi
- $H_0$ :n taajuuudet yhteismitattomat (kvasiperiodinen liike)

Väite: Liike pysyy rajoitettuna  $n$ -ulotteiselle torukselle lukuunottamatta pientä joukkoa alkuehtoja, joilla liike vaelttaa  $2n - 1$  ulotteisella energiapinnalla.

Todistus: Vaikea.  $\square$

{	faasiavaruus	$2n$ -ulotteinen
	torus	$n$ -ulotteinen
	$E$ -pinta	$2n - 1$ -ulotteinen

Siis pieni häiriö ei muuta kvasiperiodista liikettä paljon, kunhan häiriötön rata on tiheä  $n$ -toruksen pinnalla

Jos KAM-teoreeman oletukset eivät ole voimassa, on kaaos mahdollinen

## Kaoottinen liike

**Kaoottisen liikkeen ominaisuuksia:**

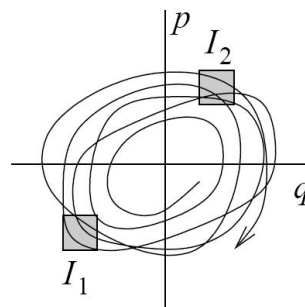
Sekoittuminen:  
rata käy  $I_1 \in I$   
 $\Rightarrow$  rata käy  $I_2 \in I$

Kvasiperiodisuus:  
toistuvasti  $\in I_i$ ,  
ei ominaistaajuutta

Tiheys:  
käy mieliv. lähellä  
kaikkia pisteitä

Herkkyys alkuarvoille:

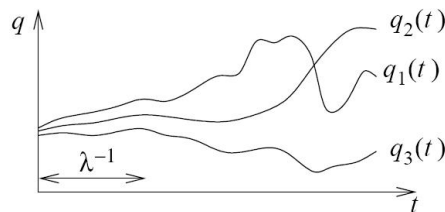
esim. parabolinen ( $E = 0$ ) Keplerin rata +  $\Delta H$   
 $\rightarrow$  suljettu ellipsi ( $E < 0$ ) tai avoin hyperbeli ( $E > 0$ )



## Ljapunovin eksponentit

Kaoottisessa liikkeessä radat erkanevat toisistaan eksponentiaalisesti

$$S(t) = \|(p, q)_1(t) - (p, q)_2(t)\| \sim S_0 e^{\lambda t}$$



Poikkeaman aikaskaala  $\tau = 1/|\lambda|$

$\lambda > 0$ : kaaos

$\lambda < 0$ : liike kohti attraktoria

$\lambda > 0$ :

$\Delta t \ll 1/\lambda \Rightarrow$  ennustettavuus hyvä

$\Delta t \gg 1/\lambda \Rightarrow$  ei ennustettavissa (perhosefekti)

## Planeettakunnan stabiilisuudesta

Häiriöt epälineaarisia ja rikkovat keskeisliikkeen symmetrian

$\rightarrow$  systeemi ei integroidu

Häiriöt pieniä?

$$\Delta H = - \sum_i \frac{GM_i m}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_i|}$$

Yleensä kyllä,  $\Delta H/H_0 = \mathcal{O}(M_i/M_\odot)$ , mutta

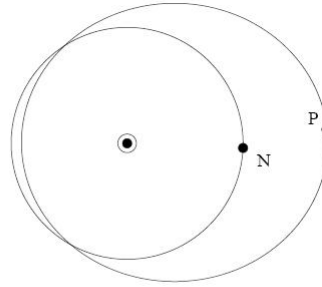
- $H_0$ :n resonanssit  $\uparrow$  KAM
    - Venuksen ja Merkuriuksen pyöriminen
    - Kuun pyöriminen
    - Trojalaiset asteroidit
  - Häiriöt suuria, jos  $|\mathbf{r} - \mathbf{R}_i| \sim M_i r / M_\odot$
- $\Rightarrow$  Jättiläisplaneetat sirottavat komeettoja ja asteroideja
- Systeemi selvästi kokonaisuutena kaoottinen:
    - koostuu suuresta määrästä kappaleita erilaisilla radoilla
    - hyvin eksentriset radat erittäin herkkiä alkuarvoille
    - resonanssit voimistavat häiriöiden vaikutusta

Esim. Merkurius saattaa karata tai törmätä Venukseen

$$\tau \sim 3.5 \text{ Ga} \Rightarrow \lambda \sim 3 \cdot 10^{-10} \text{ a}^{-1}$$

Efekti on niin pieni, että se ei vielä edes näy

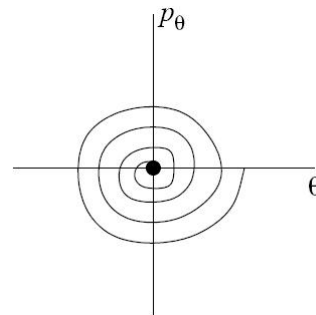
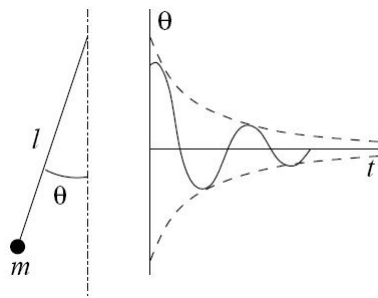
Huom.  $H_0$ :n resonanssi voi olla myös rataa **stabiloiva** tekijä: esim. Pluto ja Neptunus



$$H_0 = \sum_{j=N,P} \left( \frac{p_{r,j}^2}{2m_j} + \frac{p_{\varphi,j}^2}{2m_j r_j^2} - \frac{k}{r_j} \right); \quad \Delta H = -\frac{k}{|r_N - r_P|}$$

## Attraktorit

Esim. vaimennettu heiluri  $\rightarrow$  kiintopiste



Attraktorin dimensio  $\begin{cases} d = 0 & \text{kiintopiste} \\ d = 1 & \text{rajasykli} \\ d = 2 & \text{torus} \end{cases}$  jne.

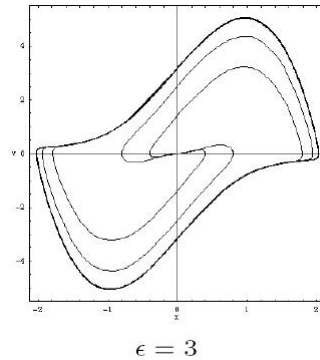
Esim. Van der Polin oskillaattori

$$\ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = F \cos \omega_D t$$

- Jos  $F = 0 \approx \epsilon \rightarrow$   
rajasykli ellipsi
- Jos  $F = 0, \epsilon \neq 0 \rightarrow$   
rajasykli deformoituu
- rata ei erkane kauas  
rajasyklistä

Jos  $F \neq 0$   
niin pienellä joukolla kontrolliparametrin  
arvoja kyseessä on outu attraktori

Oudoille attraktoreille:  $d \notin \mathbb{N}$ , fraktaalit, kaottinen liike



## Fraktaalit

Fraktaalit ovat siis matemaattisia otuksia joiden dimensio ei ole kokonaisluku.

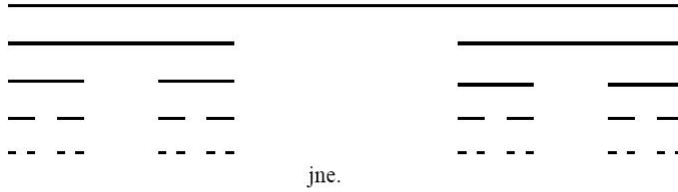
Aloitetaan euklidisen dimension määrittämisestä

Esim. Jana (pituus  $a_0$ ): jaetaan yhtä pitkiin pätkiin  $a$   
Neliö (sivu  $a_0$ ): jaetaan yhtäsuuriin palasiin, sivu  $a$   
Kuuio (särmä  $a_0$ ): jaetaan yhtäsuuriin koppeihin, särmä  $a$   
jne.

$$\text{Osien lukumäärä } N(a) = \left(\frac{a_0}{a}\right)^d \Rightarrow$$

$$d = \frac{\ln N(a)}{\ln(a_0/a)}; \quad d \in \mathbb{N}, \quad d = d_E$$

Cantorin joukko: poistetaan janasta aina keskimäinen kolmannes



Dimensio:  $\begin{cases} \text{jana} & d = 1 \\ \text{piste} & d = 0 \end{cases} ?$  Jokainen pätkä on jana, jolle  $d_E = 1$

Sovelletaan edellä ollutta dimension etsimistä Cantorin joukkoon

$$a_n = a_0/3^n; \quad N(a_n) = 2^n$$

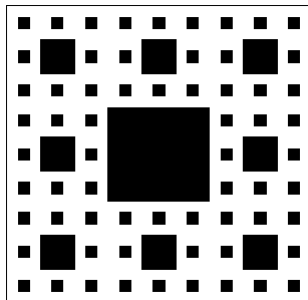
$$\Rightarrow d_F = \frac{\ln N(a_n)}{\ln a_0/a_n} = \frac{n \ln 2}{n \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.6309 \quad \text{Hausdorffin dimensio, tai fraktaalidimensio}$$

Topologisesti Cantorin joukko koostuu lopulta irrallisista pisteistä, joten sen topologinen dimensio on  $d_T = 0$

$$d_T < d_F < d_E$$

Sierpinskiin matto:

Jaetaan neliö yhdeksään neliöön ja poistetaan keskimäinen, jne.

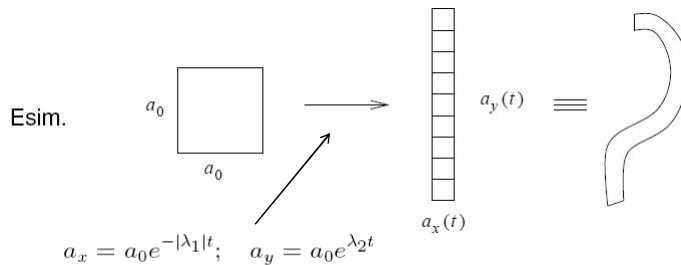


$$a_n = \frac{a_0}{3^n}; \quad N_n = 8^n \Rightarrow$$

$$d_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 8^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1.8928$$

$$\text{Jälleen } d_T < d_F < d_E$$

## Oudon attraktorin fraktaalidimensio



$$a_x = a_0 e^{-|\lambda_1|t}; \quad a_y = a_0 e^{\lambda_2 t}$$

Ol.  $A = a_x a_y = A_0 e^{(\lambda_2 - |\lambda_1|)t}$  pienenee ajan myötä (systemi dissipatiivinen)

$$\Rightarrow |\lambda_1| > \lambda_2$$

Val.  $a(t) = a_x(t) \Rightarrow N(t) = A/a^2 = e^{(\lambda_2 + |\lambda_1|)t}$

$$d_F = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln N}{\ln(a_0/a)} = \frac{\lambda_2 + |\lambda_1|}{|\lambda_1|} = 1 + \frac{\lambda_2}{|\lambda_1|}$$

$$1 < d_F < 2$$

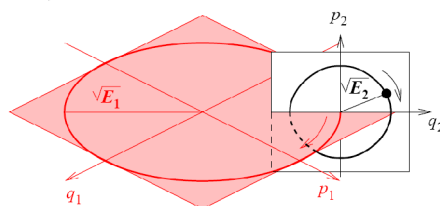
## Poincarén kuvaukset

Ol.  $n = 2$ .

Jos systemi integroitava, on liike toruksen pinnalla.

$$E_1 = p_1^2 + q_1^2$$

$$E_2 = p_2^2 + q_2^2$$



Jos oskillaattorit kytketty (esim. termillä  $q_1^2 q_2$ ), liike ei pysy toruksella

Kaoottisen liikkeen visualisointi 4-ulotteisessa faasiavaruudessa hankalaa

- $E$ -pinta 3-ulotteinen!

$\Rightarrow$  otetaan 2D leikkauksia  $E$ -pinnasta: Poincarén leikkaus

Yleensä val.  $(q_1, p_1)$ - tai  $(q_2, p_2)$ -taso.

Lisäksi pitää määrätä ne pisteet, joissa rata kulkee leikkauksen läpi.

Tällainen kuvaus  $\mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^2$  on nimeltään Poincarén kuvaus.

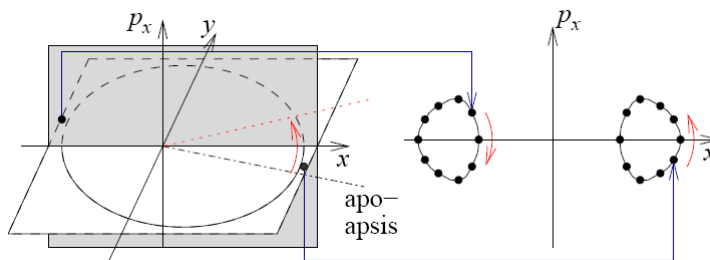
## Esim. prekessoiva ellipsi

Keplerin liike + pieni häiriö  $\Rightarrow$  rata prekessoiva ellipsi  $xy$ -tasossa

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} - \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Val. Poincarén leikkaukseksi  $(p_x, x)$ -taso ja kuvaus siten, että tasoon merkitään piste aina, kun hiukkanen ohittaa  $x$ -akselin ( $y = 0$ )



## Hénonin – Heilesin Hamiltonin funktio

Probleema: Tähtien liike galaksin keskuksen ympäri

$n$  valtava,  $U(r, \theta, \varphi)$  hankala!

H&H: tasoliike, malli  $H$ :

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \underbrace{\lambda(x^2y - \frac{1}{3}y^3)}_{= \Delta H}$$

$\rightarrow$  napakoordinaatit  $(r, \theta)$

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \underbrace{\frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{3}\lambda r^3 \sin 3\theta}_{= U(r, \theta)}$$

Skaalataan massa, aika ja pituus s.e.  $m = k = \lambda = 1$

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + x^2y - \frac{1}{3}y^3$$

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + x^2y - \frac{1}{3}y^3$$

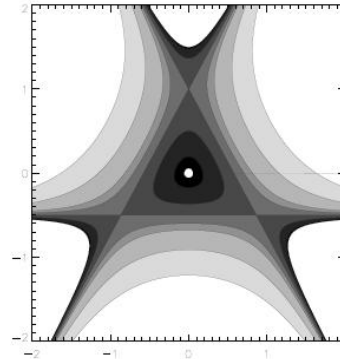
$$\stackrel{\text{LY/HY}}{\Rightarrow} \begin{cases} \ddot{x} = -x - 2xy \\ \ddot{y} = -y - x^2 + y^2 \end{cases}$$

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{3}r^3 \sin 3\theta$$

Annetulle  $U(r, \theta) = E$ :

$r$  minimissä, kun  $\sin 3\theta = 1$

$r$  maksimissa, kun  $\sin 3\theta = -1$



$E \leq \frac{1}{6} \Rightarrow$  tähdet potentiaaliukuopassa,  $E > \frac{1}{6} \Rightarrow$  tähdet karkaavat

Ol. kokonaisenergia  $E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 + U(x, y) < \frac{1}{6}$  (suljetut radat)

Koska potentiaali on tarkastelualueessa aina positiivinen, on

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 \leq \frac{1}{6} & \Rightarrow (\dot{x}, \dot{y}) \text{ ympyrän sisällä} \\ U = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + x^2y - \frac{1}{3}y^3 \leq \frac{1}{6} & \Rightarrow (x, y) \text{ rajakäyrän sisällä} \end{cases}$$

Liike siis rajoittuu äärelliseen alueeseen 4-ulott. faasiavaruudessa.

Tarkastellaan Poincarén leikkausta  $(y, \dot{y})$ -tasossa pitkin  $x$ -akselia:

käytettävissä olevan alueen rajakäyrä ( $x = 0, \dot{x} = 0$ )

$$\frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 = E$$

Val. esim.  $E = \frac{1}{12}$  ja  $y_1 = 0,02, \dot{y}_1 = -0,08$  (Hénon & Heiles)

Olkoon alkupiste Poincarén leikkauksessa ( $x_1 = 0$ ), jolloin

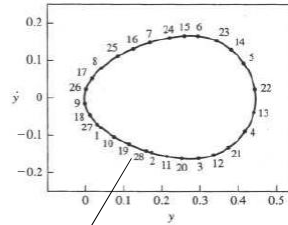
$$\dot{x}_1 = \sqrt{2E - \dot{y}_1^2 - y_1^2 + \frac{2}{3}y_1^3}$$

Integroidaan radan yhtälöt, kunnes

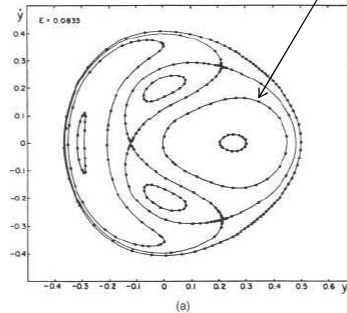
$x = 0 \rightarrow (y_2, \dot{y}_2)$  ja  $\dot{x}_2$

Uusi kierros  $\rightarrow (y_3, \dot{y}_3)$  ja  $\dot{x}_3$ , jne.

Rajasykli ( $d = 1$ ) liike säännöllistä



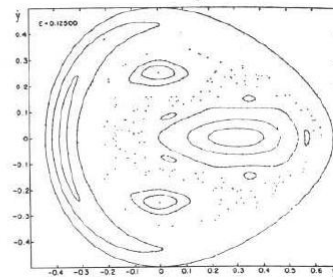
$$E = \frac{1}{12}$$



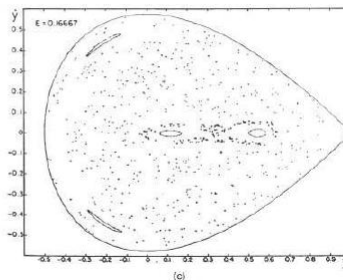
- Neljä elliptistä kp:ttä
- Kolme hyperbolista pistettä
- Rajakäyrät

- Uusia elliptisiä kp:itä
  - Kaottinen alue
- Elliptisten alueiden reunakäyrät leviävät oudoiksi attraktoreiksi

$$E = \frac{1}{8}$$



$$E = \frac{1}{6}$$



- Säännöllisen liikkeen alua kutistunut (lähes mitättömäksi)
- Kaaos vallitsee!

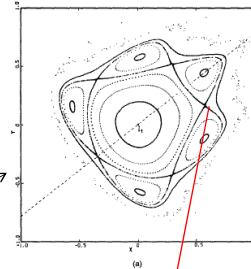
## Esim. Kvadraattinen kuvaus

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cos \alpha - y_n \sin \alpha \\ \quad + x_n^2 \sin \alpha \\ y_{n+1} = x_n \sin \alpha + y_n \cos \alpha \\ \quad - x_n^2 \sin \alpha \end{cases}$$

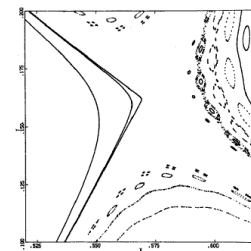
missä  $-1 < x, y < 1$   
ja  $\alpha$  on ns.  
kontrolliparametri.

Val.  $\cos \alpha = 0.4$  ja  
plotataan peräkkäisiä  
pisteitä  $xy$ -tasoon.

Kaottisen systeemin  
tärkeä ominaisuus,  
itsesimilaarisuus:  
elliptisiä pisteitä yhä  
pienemmissä skaaloissa.



suurennos



Minimivaatimus kaottisuudelle 1. kl:n liikeyhtälöissä:

- epälineaarisuus
- vähintään kolmen muuttujan autonominen systeemi
- kytkentä

Esim. 1. Hénon & Heiles:

4 riippuvaa + 1 riippumaton ( $t$ ) muuttuja.

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x; & \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_x = -x - 2xy; & \dot{v}_y = -y - x^2 + y^2 \end{cases}$$

Esim. 2: vaimennettu pakotettu oskillaattori:

$$\ddot{\theta} + \frac{1}{q}\dot{\theta} + \sin \theta = g \cos(\omega_D t)$$

missä  $q^{-1}$  vaimennuskerroin ja  $g$  pakkovoiman amplitudi dimensiotomissa yksiköissä.  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega_D \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -q^{-1}\omega - \sin \theta + g \cos \varphi \end{cases}$$

$\varphi$  pakkovoiman vaihe

3 muuttujan epälineaarinen autonominen systeemi

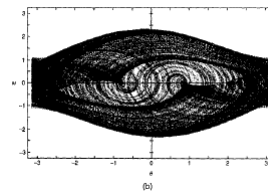
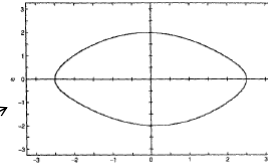
## Vaimennettu pakotettu oskillaattori

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega_D & \varphi \text{ pakkovoiman vaihe} \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -q^{-1}\omega - \sin \theta + g \cos \varphi \end{cases}$$

Val.  $q = 2$ ; tutkitaan tilannetta  $g$ :n funktiona ( $g$  kontrolliparametri)

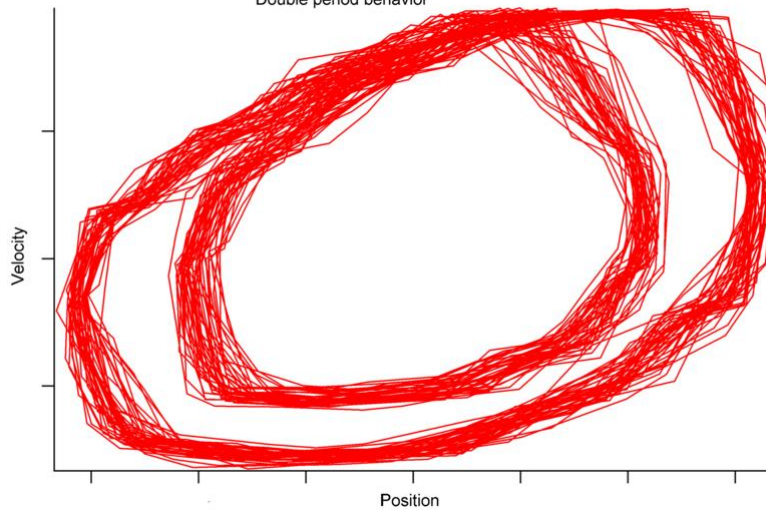
Poincarén leikkaus  $\theta\omega$ -tasoon.  
(mukana kaikki radan pisteet)

$$g = \begin{cases} 0.9 & \text{säännöllinen liike} \\ 1.15 & \text{kaoottinen liike} \end{cases}$$



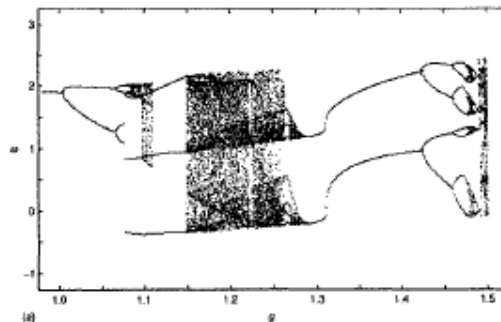
Ensin liikkeellä on kaksi "periodia"

Double period behavior

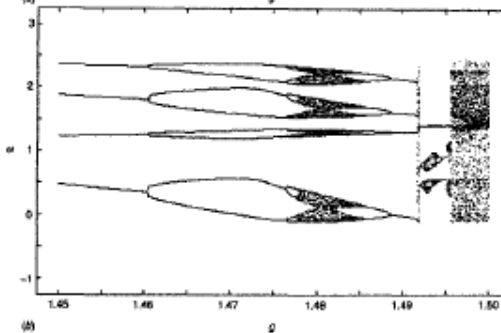


ja sitten niitä tulee lisää

$\omega(\varphi = \text{vakio})$   $g$ :n funktiona.  
Ns. Feigenbaumin kuvio



Bifurkaatiot  
Kaoottiset alueet  
Itsesimilaarisuus



## Logistinen yhtälö

Tarkastellaan DY-ryhmän asemesta logistista yhtälöä

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$$

$a$  kontrolliparametri;  $0 \leq x \leq 1$

$x_n^2$ -termi  $\rightarrow$  epälineaarinen

$x_n \rightarrow x_\infty$ , kun  $n \rightarrow \infty$ ; kiintopiste (?)

Asetetaan  $x_{n+1} = x_n = x_\infty \Rightarrow a(1 - x_\infty) = 1 \Rightarrow x_\infty = \frac{a-1}{a}$

Mahdollinen vain, jos  $a \geq 1$ . Tarkastellaan aluetta  $1 \leq a \leq 4$

Onko  $x = x_\infty$  stabiili?

Val.  $x_n = x_\infty \pm \delta$ , missä  $0 < \delta \ll 1$

$$\Rightarrow x_{n+1} = (a-1 \pm a\delta)\left(1 - \frac{a-1}{a} \mp \delta\right) = x_\infty \pm (2-a)\delta + \mathcal{O}(\delta^2)$$

$$x_{n+1} = x_n \pm (2-a)\delta + \mathcal{O}(\delta^2)$$

Sis jotta  $x_n \rightarrow x_\infty$ , pitää olla  $|2-a| < 1$  eli  $1 < a < 3$ .

$$a = 2 \quad x_\infty = 0.5$$

$$a = 3 \quad x_\infty = 0.666\dots$$

$$a = 3.2 \quad x_\infty = 0.513; x_\infty = 0.799$$

$$a = 3.5 \quad 4 \text{ kiintopistettä}$$

Bifurkaatiot:

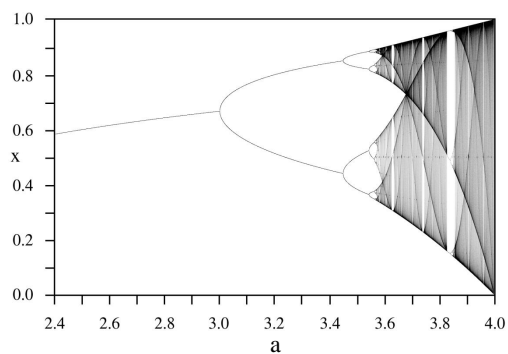
$$a_2 = 3.45 \quad 2 \rightarrow 4$$

$$a_3 = 3.544 \quad 4 \rightarrow 8$$

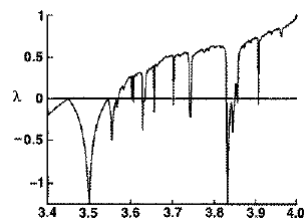
$$a_4 = 3.566 \quad 8 \rightarrow 16$$

$a_\infty = 3.5699456\dots \rightarrow$  liike kaotisoituu; Feigenbaumin piste

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = 4.6692016\dots \quad \text{Feigenbaumin luku}$$

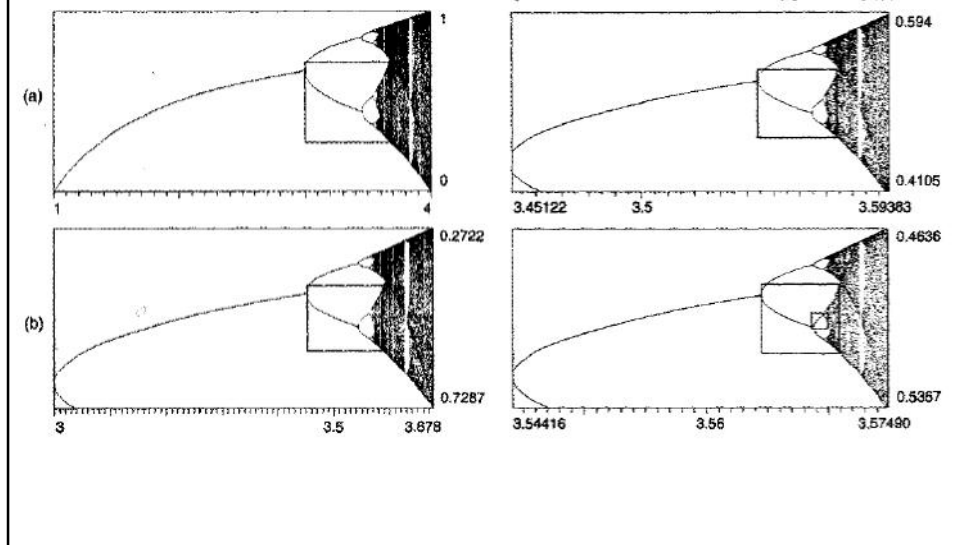


Kuva logistisen yhtälön kuvaaman liikkeen bifurkoitumisesta



Ljapunovin eksponentti

## Itsesimilaarisuus logistisessa yhtälössä



## Säännöllistä liikettä kaaoksen keskellä!

