

# Keskeisvoimat

- Keskeisvoiman käsite
- Kahden kappaleen ongelma
  - ekvivalentti yhden kappaleen ongelma
  - tilanteen redusoiminen yhteen ulottuvuuteen

Energian säilyminen  $\Rightarrow \int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}}$  missä löydettävä  $U(x)$ !

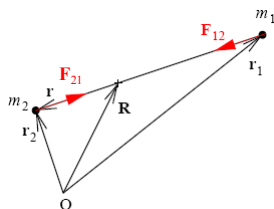
## □ Keplerin lait

- rataelementit
- sironta
- useamman kappaleen ongelmista

$$F(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{e}_r$$

Huom.  $r$  voi olla vektori  
eli  $f$  eri suuri eri suuntiin!

Historiallinen ja tärkeä esimerkki on planeetan liike Auringon ympäri.  
Se on **2 kappaleen ongelma**, joka voidaan aina redusoida keskeisliikkeeksi



Kaksi kappaletta:  $m_1$  ja  $m_2$

Massakeskipisteen (CM) paikka on

$$R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$$

**N-III:**  $F_{12} = -F_{21}$        $m_1 \ddot{r}_1 = F_{12};$   
 $m_2 \ddot{r}_2 = F_{21} = -F_{12} \Rightarrow$

$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{m_1 \ddot{r}_1 + m_2 \ddot{r}_2}{m_1 + m_2} = 0$  eli CM:n nopeus on vakio

CM:een voidaan kiinnittää *intertiaalikoordinaatisto*.

$m_2 \ddot{r}_2 - m_1 \ddot{r}_1 = 2F_{21}$

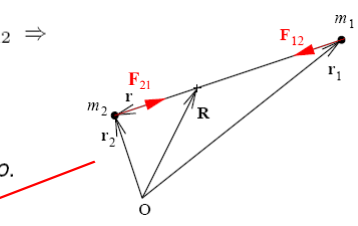
$r_1 = \mathbf{R} - \frac{m_2 \mathbf{r}}{m_1 + m_2}; \quad r_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1 \mathbf{r}}{m_1 + m_2}$

$m\ddot{r} = F_{21}$ , missä  $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  on redusoitu massa

Tässä  $F_{21} = f(r)e_r$ , eli siis keskeisvoima

Jos  $m_1 \gg m_2$  (esim. Aurinko ja planeetta):

$m \approx m_2, \quad r_1 \approx \mathbf{R} \text{ ja } r_2 \approx \mathbf{R} + \mathbf{r}$



## Liike keskeisvoimakentässä

Tarkastellaan jatkossa voimia, jotka ovat muotoa  $F(r) = f(r)e_r$  skalaari

Voima osoittaa aina origoon!

Lasketaan ensin voiman momentti

$r \times \dot{p} = r \times F = f(r) r \times e_r = 0$

josta seuraa, että liikemäärämomentti on liikevakio

$\dot{L} = \frac{d}{dt}(r \times p) = v \times p + r \times \dot{p} = 0$

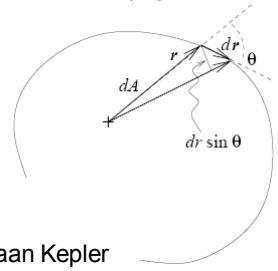
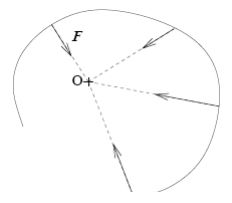
Koska  $r \perp L$  ja  $v \perp L$ , liike tapahtuu tasossa

Lasketaan vielä

$dA = \frac{1}{2} r \sin \theta dr = \frac{1}{2} |r \times dr|$

$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |r \times v| = \frac{1}{2m} |L|$

Eli pinnanopeus  $dA/dt$  on vakio. Tuloksen löysi aikanaan Kepler ja se tunnetaan Keplerin toisena lakina



## Liikyehtälö pallokoordinaatistossa

Val.  $L \parallel e_z \Rightarrow \theta = 90^\circ$ , eli liike  $xy$ -tasossa

$$e_r = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$$

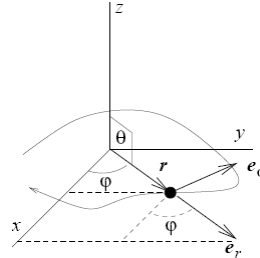
$$e_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

$$\frac{d}{dt}e_r = \dot{\varphi}e_\varphi; \quad \frac{d}{dt}e_\varphi = -\dot{\varphi}e_r$$

$$r = re_r \Rightarrow \dot{r} = \dot{r}e_r + \dot{\varphi}re_\varphi$$

$$\ddot{r} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)e_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})e_\varphi$$

$$m\ddot{r} = f(r)e_r \Rightarrow \begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = f(r) \\ m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0 \end{cases}$$



Integroidaan alempi  $\Rightarrow mr^2\dot{\varphi} = \text{vakio} \equiv l \Rightarrow$

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r)$$

$F = f(r)e_r$  konservatiivinen (HT)  $\Rightarrow f(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}$ .

Kerrotaan puolittain  $\dot{r}$ :llä  $\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mr\dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} + U \right) = 0$  Energiaehtälö

## Radan integrointi liikyehtälöstä

Kokonaisenergia  $E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} + U = \text{vakio}$

Yksiuotteiselle liikkeelle

keskipakopotentiaali

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}}$$

Yleistys:  $x \rightarrow r$ ,  $U(x) \rightarrow U(r) + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} = U'(r)$  "efektiivinen potentiaali"

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U'(r)}} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U(r) - \frac{l^2}{2mr^2}}}$$

Radan  $r = r(\varphi)$  yhtälö?

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{l}{d\varphi mr^2} \Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2m}{l^2}[E - U(r)] - \frac{1}{r^2}}}$$

Liike mahdollista vain, jos  $E > U'(r)$

## Ratoja erilaisissa potentiaaleissa

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)]}$$

Liike mahdollinen, joss  $E > U(r) \Rightarrow$  ehto mahdollisille  $r$ -arvoille!

$$v^2 = |\dot{\mathbf{r}}|^2 = |\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2 + r^2\frac{l^2}{m^2r^4}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U'(r)$$

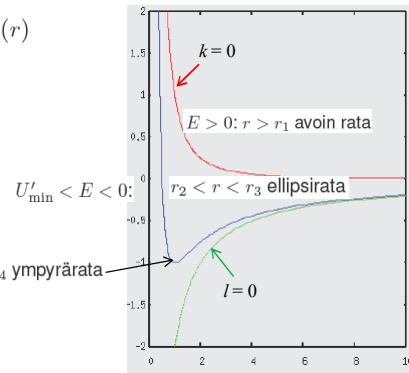
"Efektiivinen voima" (myös suoraan LY:stä)

$$f' = -\frac{\partial U'}{\partial r} = f + \frac{l^2}{mr^3}, \quad \text{missä } f = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

Esim.  $f = -k/r^2, (k > 0)$

$$\Rightarrow U = -k/r$$

$$U'(r) = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$



## Potentiaali $U(r) = -kr^n, n \in \mathbb{Z}$

Edellä  $n = -1$ . Tilanne samankaltainen aina, jos  $n > -2$ .

Mitä tapahtuu, jos  $l = 0$ ?

Tapaus  $n = -2$ ?

Tarkastellaan sitten tapauksia  $n < -2$

Esim.  $n = -3$

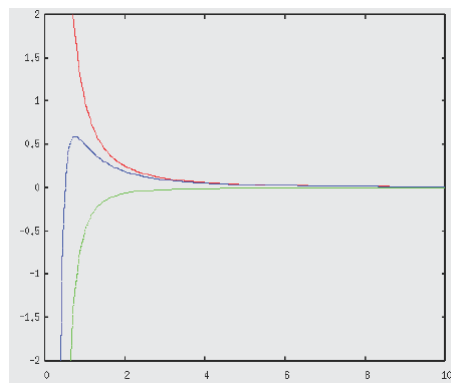
$$U = -\frac{k}{r^3} + \frac{l^2}{mr^2}$$

Huom: kun  $r \rightarrow 0, U \rightarrow -\infty$  !

Sama tilanne  $n = -4, -5, \dots$

HT: Oletetaan, että  $U = -kr^n$   
ja että hiukkanen on origon kautta  
kulkevalla ympyräradalla.

Osoita, että  $n = -4$



## Liikeradan differentiaaliyhtälö

$$\text{Energia yhtälö: } E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) \quad (\text{EY})$$

$$(\text{EY}) \Rightarrow t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U(r) - \frac{l^2}{2mr^2}}} \quad (\text{RT})$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{l}{mr^2} \Rightarrow$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2m}{l^2}[E - U(r)] - \frac{1}{r^2}}} \quad (\text{RF})$$

Minkä 2. kertaluvun differentiaaliyhtälöiden ratkaisuja nämä ovat?

$$\text{Radan (RT) antaa (tietysti) } m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r) \quad (\text{LY})$$

$$\text{Sijoitetaan LY:hyn } \frac{d}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d}{d\varphi} = \frac{l}{mr^2} \frac{d}{d\varphi} \Rightarrow$$

$$\frac{l}{r^2} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{l}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi} \right) - \frac{l^2}{mr^3} = f(r) \quad \text{joka siis on radan (RF) antava DY.}$$

Tarkastellaan liikeradan differentiaaliyhtälöä

$$\frac{l}{r^2} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{l}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi} \right) - \frac{l^2}{mr^3} = f(r) = -\frac{dU}{dr}$$

$$\text{Sij. } u = 1/r \Rightarrow \frac{d}{dr} = \frac{du}{dr} \frac{d}{du} = -u^2 \frac{d}{du}; \quad \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = -\frac{m}{l^2} \frac{d}{du} U(u^{-1})$$

$$\text{Tehdään sama sijoitus ratkaisuun } \varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2m}{l^2}[E - U(r)] - \frac{1}{r^2}}}$$

$$\Rightarrow \varphi = \varphi_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2m}{l^2}[E - U(u^{-1})] - u^2}}$$

Jos  $U = -kr^{n+1} = -ku^{-n-1}$  ( $n \neq -1$ ), niin

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{E + ku^{-n-1} - \frac{l^2}{2m}u^2}} \quad \begin{array}{l} n = 1, -2, -3; \text{ trigonometrisia funktioita} \\ n = 5, 3, 0, -4, -5, -7; \text{ elliptisiä funktioita} \end{array}$$

Tällä kurssilla:  $n = 1$  Hooken laki (huom. tuolloin  $k < 0$ )

$n = -2$  Keplerin liike

## Esimerkki: Hooken laki

Ratayhtälö, kun  $U = \frac{1}{2}ku^{-2}$  ( $k > 0$ ,  $f(r) = -kr$ )

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{E - \frac{1}{2}ku^{-2} - \frac{l^2}{2m}u^2}}$$

Lasketaan 
$$I \equiv \int \frac{du}{\sqrt{E - \frac{1}{2}ku^{-2} - \frac{l^2}{2m}u^2}} = \int \frac{u du}{u \sqrt{E - \frac{1}{2}ku^{-2} - \frac{l^2}{2m}u^2}}$$

$$= \int \frac{d(\frac{1}{2}u^2)}{\sqrt{Eu^2 - \frac{1}{2}k - \frac{l^2}{2m}u^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{-\frac{l^2}{2m}x^2 + Ex - \frac{1}{2}k}},$$

sij.  $x = u^2$

Taulukkotietoa 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arccos \frac{-b - 2ax}{\sqrt{b^2 - 4ac}},$$

joten 
$$I = \sqrt{\frac{m}{2l^2}} \arccos \frac{l^2 u^2 - mE}{\sqrt{m^2 E^2 - ml^2 k}}$$

ja 
$$\varphi = \varphi' - \frac{1}{2} \arccos \frac{l^2 u^2 - mE}{\sqrt{m^2 E^2 - ml^2 k}}; \quad \varphi' \text{ integroimisvakio}$$

## Ympyräratojen stabiilisuus

Konservatiivisessa keskeisvoimakentässä ympyrärata on mahdollinen ratkaisu

Stabiilisuus: Jos rataa tehdään pieni häiriö, säilyykö rata?

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r); \quad \text{ympyrärata: } r = a = \text{vakio} \quad \Rightarrow \quad -\frac{l^2}{ma^3} = f(a) \quad (*)$$

Määr.  $r = a + x$ , missä  $x \ll a$  ja sijoitetaan liikeyhtälöön

$$\Rightarrow m\ddot{x} - \frac{l^2}{m}(x+a)^{-3} = f(x+a)$$

Kehitetään  $x$ :stä riippuvat termit Taylorin sarjaksi

$$m\ddot{x} - \frac{l^2}{ma^3} \left(1 - \frac{3x}{a} + \dots\right) = f(a) + xf'(a) + \dots$$

$$x \ll a \text{ \& } (*) \Rightarrow m\ddot{x} - \left[3\frac{f(a)}{a} + f'(a)\right]x = 0$$

Jos  $f(a) + \frac{1}{3}af'(a) > 0$ ,  $x$  kasvaa eksponentiaalisesti

Jos  $f(a) + \frac{1}{3}af'(a) < 0$ ,  $x$  oskilloi  $\Rightarrow$  stabiili ratkaisu

Esim:  $f(r) = -Cr^n$ ,  $C > 0$  :

ympyrärata stabiili, jos

$$-Ca^n - \frac{1}{3}a Cna^{n-1} < 0$$

$$\Leftrightarrow n > -3$$

esim.  $n = -2, 1$

## Keplerin lait

Tyko Brahe (1546-1601) teki erittäin tarkkoja havaintoja

Kepler syntetisoi havainnot kolmeen liikelakiin

K-I Planeettojen radat ovat ellipsejä, joiden toisessa polttopisteessä on Aurinko (v. 1609)

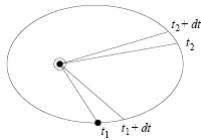
K-II Auringosta planeettaan piirretty paikkavektori kiertää siten, että sen aikayksikössä pyyhkäisemä pinta-ala (pintanopeus) on vakio (1609)

K-III Kiertoaikojen neliöt suhtautuvat kuten isoakseliin kuutiot (1619)



Johannes Kepler,  
1571-1630

K-II



K-III:

$$T_{\text{Maa}} = 1 \text{ a}$$

$$T_{\text{Jup}} = 5.20^{3/2} \text{ a} = 11.9 \text{ a}$$

## Newtonin painovoimalaki

Keplerin lait olivat puhtaasti empiirisiä.

Hän ei tiennyt millainen voima tuottaisi ne!

Newton oli ilmeisesti jo nuorena miehenä keksinyt painovoimalakinsa, muttei julkaissut sitä ennen kuin Principiassa vuonna 1687. Laki kuuluu:

**Kahden kappaleen välinen vetovoima on verrannollinen niiden massojen tuloon ja kääntäen verrannollinen niiden välisen etäisyyden neliöön**

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{e}_r$$

Jo edeltä tuttu keskeisvoima, mistä seuraa suoraan K-II

Gravitaatiovakio  $G = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$

Epätarkimmin tunnettu luonnonvakio!!

Potentiaali  $U(r) = -k/r$ , missä  $k = GMm$

## Pallokuoren potentiaali

Renkaan muotoinen kuoren osa:  $\theta \rightarrow \theta + \Delta\theta$

– renkaan säde =  $a \sin \theta$

– renkaan leveys =  $a \Delta\theta$

Jokainen piste renkaalla

$s$ :n etäisyydellä  $m$ :stä

Kontribuutio potentiaalienergiaan:  $\Delta U = -\frac{Gm \Delta M}{s}$

Renkaan massa ( $M_s$  ja  $A_s$  kuoren massa ja pinta-ala)

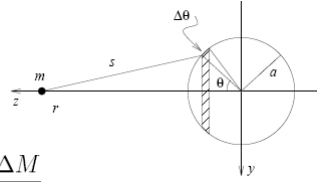
$$\Delta M = \frac{\Delta A}{A_s} M_s = \frac{(2\pi a \sin \theta)(a \Delta\theta)}{4\pi a^2} M_s = \frac{1}{2} \sin \theta \Delta\theta M_s$$

$$\Delta U = -\frac{1}{2} Gm M_s \frac{\sin \theta \Delta\theta}{s}$$

Integroidaan kaikkien renkaiden yli,  $\theta : 0 \rightarrow \pi$ :  $U = -\frac{1}{2} Gm M_s \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{s(\theta)}$

$$s^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta$$

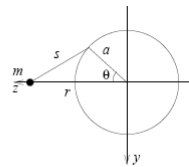
$$\Rightarrow 2s \frac{ds}{d\theta} = 2ar \sin \theta \Rightarrow \sin \theta d\theta = \frac{s ds}{ar} \Rightarrow U = -\frac{Gm M_s}{2ar} \int_{s(0)}^{s(\pi)} ds$$



$$U = -\frac{Gm M_s}{2ar} \int_{s(0)}^{s(\pi)} ds$$

1)  $r > a$ :  $s(0) = r - a$ ,  $s(\pi) = r + a$

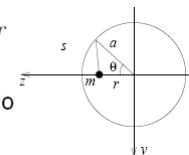
$$U = -\frac{Gm M_s}{2ar} 2a = -\frac{Gm M_s}{r}$$



Sama tulos kuin jos pallokuoren massa olisi origossa!

2)  $r < a$ :  $s(0) = a - r$ ,  $s(\pi) = a + r$

$$U = -\frac{Gm M_s}{2ar} 2r = -\frac{Gm M_s}{a} = \text{vakio}$$



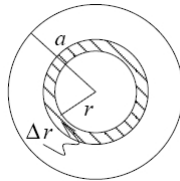
$$\text{Voima } \mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r \quad \mathbf{F} = \begin{cases} -\frac{Gm M_s}{r^2} \mathbf{e}_r, & r \geq a \\ 0 & r < a \end{cases}$$

## Homogeenisen pallon gravitaatioenergia

Massa  $M$

tiheys  $\rho = \frac{M}{(4\pi/3)a^3}$

säde  $a$



Pallonkuori  $r \rightarrow r + \Delta r$

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho 4\pi r^2 \Delta r$$

$$\Delta U = -\frac{G M_{\text{sis}}(r) \Delta m}{r}$$

$$M_{\text{sis}}(r) = \frac{4\pi}{3} \rho r^3$$

$$\Rightarrow \Delta U = -\frac{16\pi^2 G \rho^2 r^4 \Delta r}{3}$$

$$\Rightarrow U = \int_0^a dU = -\frac{16\pi^2 G \rho^2}{3} \int_0^a r^4 dr$$

$$= \frac{16\pi^2 G \rho^2 a^5}{3 \cdot 5} = -\frac{3GM^2}{5a}$$

$-U$  on pallon gravitaatioenergia

Tämä energia vapautuu, jos koko avaruuteen tasan jakautunut massa  $M$  luhistuu  $a$ -säteiseksi palloksi

Maapallo:  $M \approx 6 \cdot 10^{24}$  kg,  $r \approx 6.4 \cdot 10^6$  m  $\Rightarrow$

$$|U_{\text{Maa}}| \approx 2 \cdot 10^{32} \text{ J}$$

## Keplerin radan lauseke

Ratayhtälö määräämättömänä integraalina:

$$\varphi = \varphi' + \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2m}{l^2}[E - U(r)] - \frac{1}{r^2}}}; \varphi' \text{ integroimisvakio}$$

Muuttujan vaihto  $r = 1/u$

$$U = -k/r = -ku \Rightarrow \varphi = \varphi' - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2m}{l^2}(E + ku) - u^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arccos\left(-\frac{b+2ax}{\sqrt{b^2-4ac}}\right), \text{ joten}$$

$$\varphi = \varphi' - \arccos \frac{\frac{l^2 u}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}} \Rightarrow u = \frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \cos(\varphi - \varphi') \right)$$

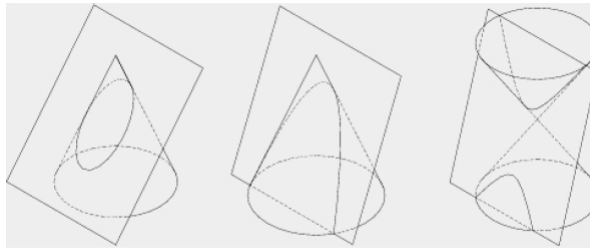
$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}; \quad \text{kartiroleikkaus, } \theta \equiv \varphi - \varphi', \quad p = \frac{l^2}{mk} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$$

## Kartioleikkaukset

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta};$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}};$$

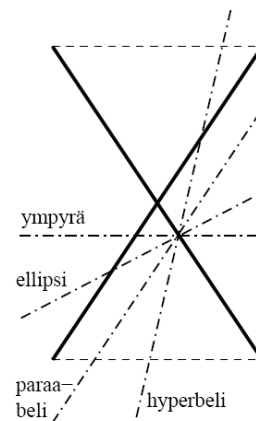
$$\text{eksentrisyys} \begin{cases} \varepsilon = 0 & \text{ympyrä} \\ 0 < \varepsilon < 1 & \text{ellipsi} \\ \varepsilon = 1 & \text{paraabeli} \\ \varepsilon > 1 & \text{hyperbeli} \end{cases}$$



ellipsi

paraabeli

hyperbeli



ympyrä

ellipsi

paraabeli

hyperbeli

## Pakonopeus

Millä nopeudella kappaleen täytyy liikkua, että se pakenee toisen kappaleen painovoimakentästä eli joutuu ellipsiradalta paraabeli- tai hyperbeliradalle?

Radan oltava avoin:  $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \geq 1$ ; missä  $\mu = \frac{mM}{m+M}$   $E \geq 0$

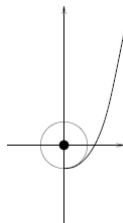
$$\frac{1}{2} \mu v_e^2 = \frac{GMm}{r} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GMm}{\mu r}} = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{r}} \approx \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

$T$

$-U$

Maan pinta  $v_e = 11.2$  km/s

Auringon pinta  $v_e = 618$  km/s



Lähtö geostationariselta radalta,  $r = 6.6 R_E$ :

vauhti aluksi  $v_{\varphi 0} = 2\pi r / (24 \text{ h}) = 3.06$  km/s

tarvitaan yhteensä  $v_e = 11.2 \text{ km/s} / \sqrt{6.6} = 4.36$  km/s

eli lisäpotku liikkeen suuntaan  $\Delta v = v_e - v_{\varphi 0} = 1.3$  km/s

## Keplerin lait ratayhtälöstä

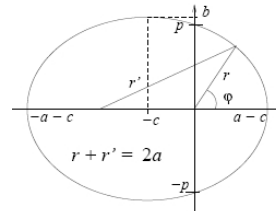
**K-I** Suljettu planeettarata  $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$  on ellipsi eli sille  $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} < 1$ ;

$-r$  osoittaa planeetasta toiseen polttopisteeseen  
Isoakselin puolikas  $a$ ; pikkuakselin puolikas  $b$ ;

$$2a = \frac{p}{1 - \varepsilon} + \frac{p}{1 + \varepsilon} = \frac{2p}{1 - \varepsilon^2}$$

HT:  $c = a - p/(1 + \varepsilon) = \varepsilon a$

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2(1 - \varepsilon^2) = ap$$



**K-II**  $dA = \frac{1}{2} r^2 d\varphi \Rightarrow \dot{A} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{l^2}{2m} = \text{vakio}$

**K-III** Ellipsin pinta-ala  $A = \pi ab$   $\frac{b^2}{a} = p = \frac{l^2}{mk} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{al}}{\sqrt{mk}}$

$$A = \int_0^T \dot{A} dt = \frac{lT}{2m} = \pi a \frac{\sqrt{al}}{\sqrt{mk}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} a^{3/2}$$

Huom.  $T$  ei riipu ellipsin muodosta  
vaan ainoastaan isoakselin pituudesta

## Laplace–Runge–Lentz-vektori

$$\mathbf{R}_L = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mk}{r} \mathbf{r}$$

Osoitetaan  $\mathbf{R}_L$  liikevakioiksi:  $\dot{\mathbf{R}}_L = \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} - \frac{mk}{r} \mathbf{v} + \frac{mk\dot{r}}{r^2} \mathbf{r} = \mathbf{F} \times \mathbf{L} - \frac{mk}{r} v_\varphi \mathbf{e}_\varphi$

$\mathbf{F} = -(k/r^3)\mathbf{r}$  ja  $\mathbf{L} = mr^2\dot{\varphi}\mathbf{e}_z$ , joten

$$(\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_\varphi)$$

$$\mathbf{F} \times \mathbf{L} = mk\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi = \frac{mk}{r} v_\varphi \mathbf{e}_\varphi \Rightarrow \dot{\mathbf{R}}_L = 0.$$

$\mathbf{R}_L$  on siis liikevakio. Selvästi  $\mathbf{R}_L$  on ratatasossa

Yhtälö  $r$ :lle  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_L = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - mkr \Rightarrow$

$$rR_L \cos \varphi = -\mathbf{L} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{r}) - mkr = l^2 - mkr$$

$$\Rightarrow r \left( 1 + \frac{R_L}{mk} \cos \varphi \right) = \frac{l^2}{mk}$$

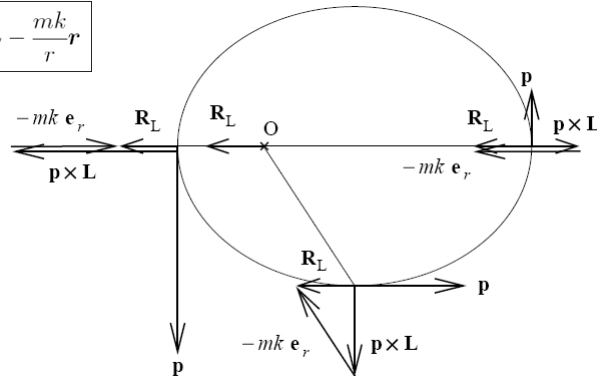
$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi};$$

$$p = \frac{l^2}{mk}, \quad \varepsilon = \frac{R_L}{mk}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$$

$$\begin{aligned} R_L^2 &= p^2 l^2 + m^2 k^2 - 2 \frac{mk}{r} l^2 \\ &= m^2 k^2 + 2m \left( \frac{1}{2} m v^2 - \frac{k}{r} \right) l^2 \\ &= m^2 k^2 + 2mEl^2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_L = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mk}{r} \mathbf{r}$$



$\mathbf{R}_L$  on siis liikevakio, eli sen suunta säilyy, KUN voima on verrannollinen  $1/r^2$

Oikeassa planeettaliikkeessä planeetat häiritsevät toisiaan ja efektiivinen voimaan tulee korjaustermejä, jotka kiertävät radan apsidiviivaa ja siten myös periapsista.

## Riippumattomat liikevakiot ja rataelementit

$r$ :llä 3 komponenttia }  $\Rightarrow$  6 integroimisvakioita  
 LY (N-II) on 2. kl. DY }

Löydetyt liikevakiot:  $L$ ,  $\mathbf{R}_L$ ,  $E$ ,  $t_0$  (yhteensä 8 kpl)

$\Rightarrow$  näistä kaikki eivät voi olla riippumattomia!

Riippuvuudet:  $R_L = mk\varepsilon = mk\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$  ja  $L \cdot \mathbf{R}_L = 0$

Riippumattomia esim.  $L$ ,  $\varepsilon$ ,  $t_0$  ja  $\mathbf{R}_L$ :n kulma  $L$ :n ympäri

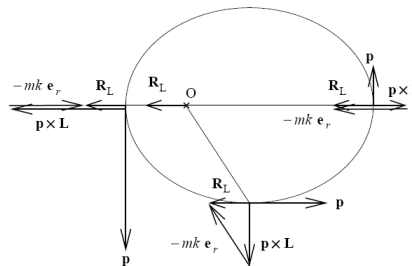
Merk.  $\angle(r, \mathbf{R}_L) \equiv \varphi \Rightarrow r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$

$r$ :llä minimi, kun  $\varphi = 0 \Rightarrow$

$\mathbf{R}_L$  osoittaa origosta kohti  
**periapsista** (l. perisentriä)

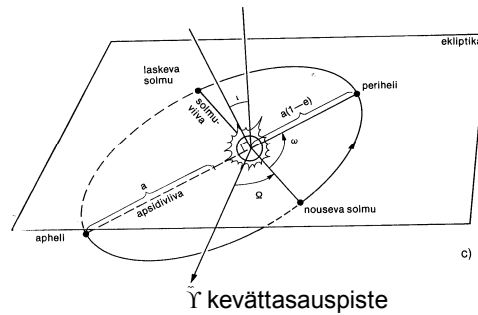
Vastakohta ( $r$ :n maksimi,  $\varphi = \pi$ )

**apoapsis** (l. aposentri)

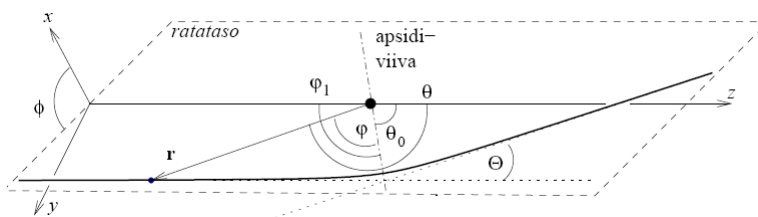


## Rataelementit (planeettaliikkeessä)

- Isoakselin puolikas  $a$
- Eksentrisyys  $\varepsilon$  (tai  $e$ )
- Inklinaatio  $i$  (tai  $\iota$ )
- Nousevan solmun pituus  $\Omega$  (kevättasauspisteestä  $j$ )
- Perihelin argumentti  $\omega$ ; tai perihelin pituus  $\varpi = \Omega + \omega$
- Periheli aika  $\tau$



## Keplerin potentiaalin hyperbeliradat

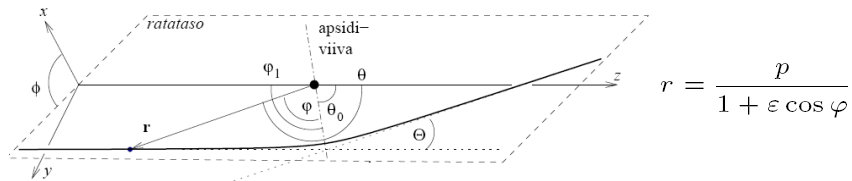


$$\text{Ol. } U = -k/r, \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} > 1 \quad r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}; \quad p = \frac{l^2}{mk}$$

$\varphi$  mitataan apsidiviivasta.

Gravitaatiopotentiaali  
Coulombin potentiaali

Kappale (hiukkanen tai planeetta) hyperbeliradalla: Sironta



Hidun tulosuunta  $\varphi = \varphi_1$ , jolloin  $r \rightarrow \infty \Rightarrow$

$$1 + \varepsilon \cos \varphi_1 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Val. pallokoordinaatisto  $(r, \theta, \phi)$  s.e.  $z$ -akseli osoittaa alkuperäisen nopeusvektorin suuntaan. (Huom.  $\phi \neq \varphi!$ )

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)} \quad \text{missä } \theta = \theta_0 \text{ apsidiviivan suunta}$$

Hiukkasen kulkusuunnan muutos eli sirontakulma

$$\Theta = 2\varphi_1 - \pi = \pi - 2\theta_0 = 2 \arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) - \pi$$

Huom. käytetty  $U$  ei ole yleinen, mutta kuvaa Newtonin gravitaatiolain lisäksi astakkaismerkkisten varausten välisen attraktiivisen Coulombin potentiaalin.

Entäs repulsiivinen potentiaali?

## Rata repulsiivisessa potentiaalissa $k/r$

$U = k/r \Rightarrow$  ratayhtälö edeltä vaihtamalla  $k$ :n merkki:

$$r = -\frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}; \quad p = \frac{l^2}{mk}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}$$

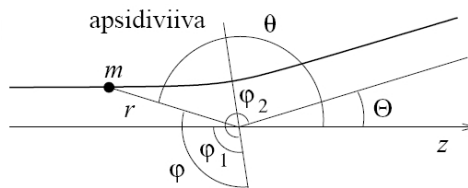
Koska  $r$  on aina positiivinen, pitää olla  $\varepsilon \cos \varphi < -1$

$\varepsilon > 1$ , joten  $\cos \varphi < -\varepsilon^{-1}$ . Periapsissuunta  $\varphi = \pi$

Pieni trigonometrinen sormiharjoitus sirontakulmaksi

$$\Theta = 2\varphi_1 - \pi = 2 \arccos(-\varepsilon^{-1}) - \pi$$

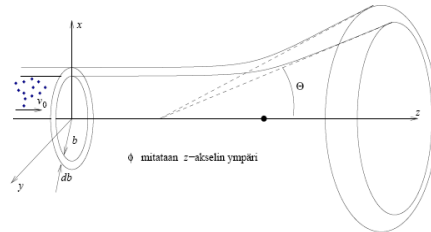
eli sama tulos kuin Keplerin  $U$ :lle



## Sironta keskeisvoimakentässä

Ol. hiukkassuihku äärettömän kaukaa, missä  $U(r) \approx 0$

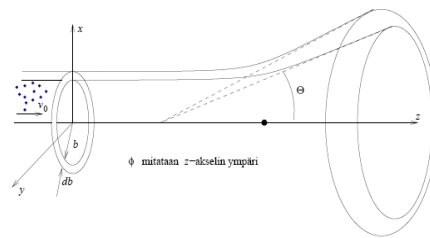
$$\left. \frac{d^2 N}{dA dt} \right|_{z \rightarrow -\infty} = I, \quad \mathbf{v}|_{z \rightarrow -\infty} = v_0 \mathbf{e}_z; \quad v_0 = \sqrt{2E/m} \quad I \text{ on intensiteetti}$$



Määr. Sirontapinta-ala suuntaan  $\Omega$ :

$$\sigma(\Omega) = \frac{1}{I} \frac{d^2 N}{d\Omega dt}$$

$\frac{d^2 N}{d\Omega dt} d\Omega dt = d\Omega$ :aan  $dt$ :ssä sironneiden hiukkasten määrä.



Val. pallokoordinaatisto  $(r, \theta, \phi)$ :  $\theta \rightarrow \Theta$  kun  $r \rightarrow \infty$  (Huom.  $\phi \neq \varphi$ !)

Symmetria  $\Rightarrow$   $\phi$  säilyy, sirontapinta-ala muotoa  $\sigma(\Theta)$  ja  $d\Omega = 2\pi \sin \Theta d\Theta$

Mittaamalla  $\frac{d^2 N}{d\Omega dt}$  eri suunnissa voidaan määrätä  $\sigma(\Theta)$

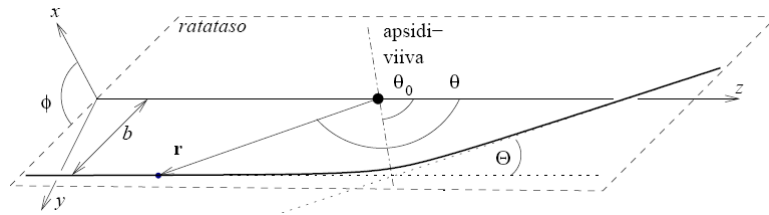
$\Rightarrow$  päätelmiä  $U(r)$ :n ominaisuuksista!

## Törmäysparametri $b(\Theta)$

Keskeiskenttä  $\Rightarrow$  liike tasossa  $\phi = \text{vakio}$ .

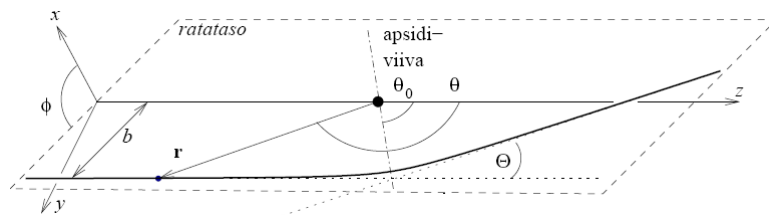
$\Rightarrow E$  ja  $l$  määräävät ratakäyrän  $r = r(\theta)$  ratatasossa.

$$l = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = m|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = mv_0 b = b\sqrt{2mE}$$



$b$  = ratasuoran etäisyys  $z$ -akselista, kun  $z \rightarrow -\infty$

$b$  ja  $E$  määräävät siis  $\Theta$ :n yksikäsitteisesti.



Ratayhtälössä  $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)}$  pitää olla  $r \rightarrow \infty$ , kun  $\theta \rightarrow \pi$   
 $\Rightarrow 1 + \varepsilon \cos(\pi - \theta_0) = 0 \Rightarrow \cos \theta_0 = -\frac{1}{\varepsilon}$  antaa periapsissuunnan

Symmetria  $\Rightarrow \Theta = \pi - 2\theta_0$ , ja sama tulos repuls.  $U$ :lle ( $k < 0$ )

$$\sin \frac{\Theta}{2} = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) = \cos \theta_0 = -\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\cot \frac{\Theta}{2} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \sqrt{\frac{2El^2}{mk^2}} = \frac{2Eb}{|k|}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{|k|}{2E} \cot \frac{\Theta}{2}}$$

## Sirontapinta-ala $\sigma(\Theta)$

Hiukkasmäärän säilyminen  $\Rightarrow$

$$I 2\pi b db = \frac{d^2 N}{dt d\Omega} d\Omega = I \sigma(\Theta) 2\pi \sin \Theta d\Theta$$

$$\Rightarrow \sigma(\Theta) = \frac{b}{\sin \Theta} \left| \frac{db}{d\Theta} \right|, \text{ missä } 1/r\text{-potentiaalissa } b = \frac{|k|}{2E} \cot \frac{\Theta}{2}$$

$$\text{Rutherfordin sirontapinta-ala } \sigma_R(\Theta) = \frac{1}{4} \left( \frac{k}{2E} \right)^2 \csc^4 \frac{\Theta}{2} \left| \csc x = \frac{1}{\sin x} \right.$$

$$\sigma_R \text{ alunperin Coulombin vuorovaikutukselle, missä } k = -\frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}$$

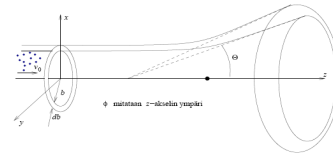
Geiger & Marsden:  $\alpha$  + Au-kalvo  $\uparrow\uparrow \sigma_R \Rightarrow$

– pistemäinen atomiydin  $\uparrow\downarrow$  Thomsonin malli

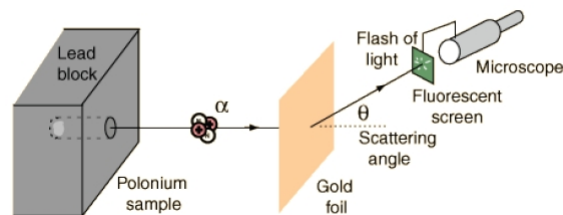
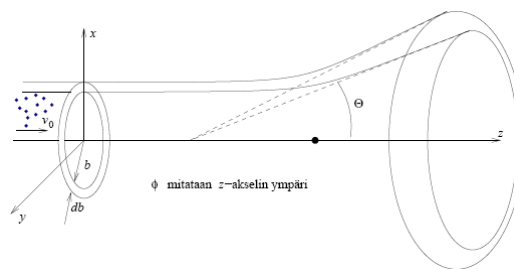
Myöh. kokeet:  $\alpha$  + Al-kalvo  $\uparrow\downarrow \sigma_R$ , kun  $\Theta$  suuri ( $b$  pieni)  $\Rightarrow$

– ytimen koko  $\approx 10^{-15}$  m

Sama tulos  $\sigma(\Theta)$ :lle kvanttimekaanisesta tarkastelusta



## Rutherfordin sirontakoe



## Kokonaisvaikutusala

Määr:  $\sigma_T = (\text{siirtojen kokonaismäärä aikayksikössä}) / I$

$$\begin{aligned}\sigma_T &= \int_{4\pi} \sigma(\Omega) d\Omega_{\text{sir}} = 2\pi \int_{0+}^{\pi} \sigma(\Theta) \sin \Theta d\Theta \\ &= 2\pi \int_{0+}^{\pi} \frac{b}{\sin \Theta} \left| \frac{db}{d\Theta} \right| \sin \Theta d\Theta = 2\pi \int_0^{b_{\text{max}}} b db = \pi b_{\text{max}}^2\end{aligned}$$

missä  $b_{\text{max}}$  on  $U$ :n kantama eli suurin  $r$ , jolle  $U(r) \neq 0$

Klassisesti  $\sigma_T \rightarrow \infty \forall b_{\text{max}} \rightarrow \infty$

Coulombin vuorovaikutukselle  $b_{\text{max}} \rightarrow \infty$

Kvanttimekaniikka:  $\sigma_T$  äärellinen, jos  $U$  pienenee nopeammin kuin  $1/r^2$

Ydinvoimat "varjostettuja". Yukawan potentiaali  $U(r) = -g^2 \frac{e^{-mr}}{r}$

Plasmassa vapaat varaukset varjostavat toisiaan (Debyen varjostus)  $U(r) = \frac{qT}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)$

## Monen kappaleen ongelmista

$N$  kpl  $i = 1, 2, \dots, N$

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}$$

Kahden kappaleen ongelma käsitelty edellä ja sillä on yleinen ratkaisu, Mutta kuinka on, kun  $N \geq 3$  ?

- Poincare (n. 1890): hyvin herkkä alkuehdoille
  - ✓ pieni virhe kasvaa rajusti
  - ✓ Kaaos (löytyi 1960-luvulla uudelleen)
- Huom: K. F. Sundman (1912):
  - ∃ yksikäsitteinen **yleisen** 3 kpl:een ongelman ratkaisu!
  - ✓ Ratkaisu on  $t^{1/3}$ :n suppeneva potenssisarja, joka kuitenkin suppenee toivottoman hitaasti.

## Rajoitettu kolmen kappaleen ongelma

- 2 massiivista kpl:tta ympyräradoilla
- 1 pieni (joka ei häiritse isoja)

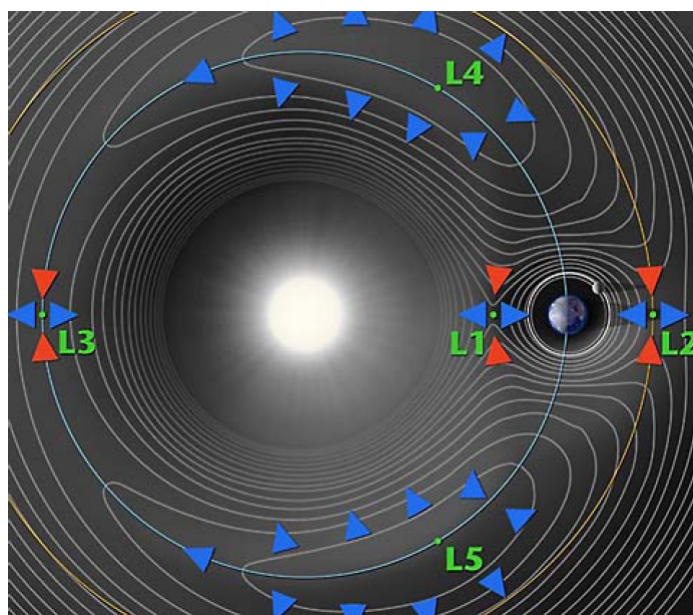
1. Ratkaistaan 2 kpl:een ongelma
2. Tutkitaan pienen liikettä

Huom. Aurinko – Maa – Kuu EI ole rajoitettu 3 kappaleen ongelma  
Kuu on liian iso ja liian lähellä Maata

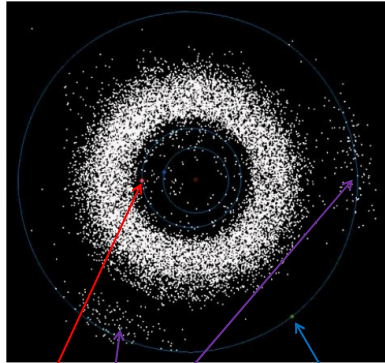
Rajoitetun 3 kappaleen ongelman erikoisratkaisuja ovat nk. Lagrangen pisteet, joissa pienimassainen kappale voi pysyä paikoillaan suuriin kappaleisiin nähden.

Esim.

- Aurinko + planeetta + asteroidi (L4, L5)
- Aurinko + Maa + satelliitti (haloradat)



Marsin ja Jupiterin välissä oleva asteroidivyö

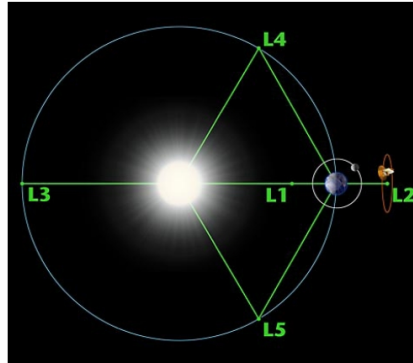


Mars

Jupiter

Trojialaiset asteroidit  
Aurinko – Jupiter-systeemin  
L4 ja L5 pisteiden ympärillä

Haloradat L1:n ja L2:n ympäri ovat suosittuja tieteellisten satelliittien sijoituspaikkoja



Maallikoilla on usein kaksi vaikeutta:

- L1 luullaan pisteeksi, jossa Auringon ja Maan vetovoimat kumoavat toisensa
  - Kuinka satelliitti voi pysyä L2:n ympärillä
- Nämä ovat kolmen kappaleen ongelmia!

## Muita 3 kappaleen ongelman ratkaisuja

Ol.  $m_i, \mathbf{r}_i$ , missä  $i = 1, 2, 3$

Merk.  $\mathbf{s}_i = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k$  (permutoi syklisesti)  $\Rightarrow \sum_i \mathbf{s}_i = 0$

Liikkeyhtälöt (HT)  $\Rightarrow \ddot{\mathbf{s}}_i = -mG \frac{\mathbf{s}_i}{s_i^3} + m\mathbf{G}$

Euler oletti:

$\mathbf{R} = 0$  ja kaikki massat samalla suoralla

Ratkaisu, jossa kaikilla radoilla on yhteinen polttopiste ja periodi

Toinen erikoistapaus:

Ol.  $\mathbf{G} = 0 \Rightarrow$  liikeyhtälöiden välinen kytkentä katoaa ja kaikille  $i$

$$\ddot{\mathbf{s}}_i = -mG \frac{\mathbf{s}_i}{s_i^3}$$

Ratkaisuna ellipsiradat, joilla yhteinen polttopiste ja sama periodi

Pitää siis olla  $\mathbf{s}_i = s(t) \forall i$  (tasasuvinen kolmio!)

Muistuttaa 2 kpl:een ongelmaa, muttei ole!