δ-FUNKTION ESITYS OMINAISFUNKTIOIDEN AVULLA

OLI: $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \qquad (1)$$

$$\mathcal{L}_x \varphi_k(x) = +\lambda_k w(x) \varphi_k(x)$$

$$a_k = \frac{(\varphi_k, f)}{(\varphi_k, \varphi_k)} = \frac{\int_a^b dx\, w(x)\, \varphi_k(x) f(x)}{\int_a^b dx\, w(x)\, \varphi_k^2(x)}$$

SIJOITETAAN a_k:N LAUSEKE KEHITELMÄÄN (1), VAIHDETAAN SUMMAUKSEN JA INTEGROINNIN JÄRJESTYSTÄ:

$$\Rightarrow f(x) = \int_a^b dy\, w(y) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k(y)\, \varphi_k(x)}{(\varphi_k, \varphi_k)} f(y)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\, \varphi_k(y)}{(\varphi_k, \varphi_k)} = \frac{1}{w(y)} \delta(x-y) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{w(x) w(y)}} \delta(x-y)$$ SYMMETRISEMPI MUOTO

(MUISTA: $f(y)\, \delta(x-y) = f(x)\, \delta(x-y)$ (D))

$$\Rightarrow \sqrt{w(x)\, w(y)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\, \varphi_k(y)}{(\varphi_k, \varphi_k)} = \delta(x-y)$$

HUOM. δ-FUNKTION OMINAISUUDEN (D) ANSIOSTA MYÖS

$$\delta(x-y) = w(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\, \varphi_k(y)}{(\varphi_k, \varphi_k)} = w(y) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\, \varphi_k(y)}{(\varphi_k, \varphi_k)}$$

OVAT PÄTEVIÄ EKPANSIOITA

S-L OPERAATTORIN GREENIN FUNKTIO

ETSIMME $G(x,y)$ S.E. $\mathcal{L}_x G(x,y) = \delta(x-y)$

YRITE: $$G(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)\, b_k(y)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_x G(x,y) = +w(x) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \varphi_k(x)\, b_k(y) = \delta(x-y) =$$

$$= w(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\, \varphi_k(y)}{(\varphi_k, \varphi_k)}$$

$$\Rightarrow b_k(y) = \frac{1}{\lambda_k (\varphi_k, \varphi_k)} \varphi_k(y)$$

JA $$G(x,y) = + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\varphi_k(x)\, \varphi_k(y)}{(\varphi_k, \varphi_k)}$$

ENTÄ JOS $\lambda = 0$ ON OMINAISARVO? ("NOLLAMOODI")

OLKOON $\mathcal{L}_x \varphi_0 = 0$ "YLEISTETTY GREENIN FUNKTIO"

VOIMME MUODOSTAA $$\bar{G}(x,y) = + \sum_{\lambda_k \neq 0} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\varphi_k(x)\, \varphi_k(y)}{(\varphi_k, \varphi_k)}$$

TÄLLÖIN $$\int_a^b dy\, \bar{G}(x,y) f(y) = + \sum_{\lambda_k \neq 0} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\langle \varphi_k | f \rangle \varphi_k(x)}{(\varphi_k, \varphi_k)}$$

JA $$\mathcal{L}_x \int_a^b dy\, \bar{G}(x,y) f(y) = \sum_{\lambda_k \neq 0} \frac{\langle \varphi_k | f \rangle}{(\varphi_k, \varphi_k)} w(x)\, \varphi_k(x)$$

$$= f(x) - \frac{\langle \varphi_0 | f \rangle}{(\varphi_0, \varphi_0)} w(x)\, \varphi_0(x)$$

$\uparrow$

$\delta(x-y) = w(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\, \varphi_k(y)}{(\varphi_k, \varphi_k)}$ ANTAA.

$$f(x) = \int_a^b dy\, \delta(x-y) f(y) = \sum_k \frac{\langle \varphi_k | f \rangle}{(\varphi_k, \varphi_k)} w(x)\, \varphi_k(x)$$

$\bar{G}$ RATKAISEE EPÄHOMOG. YHTÄLÖN VAIN, JOS $f(x)$ S.E.

$$\langle \varphi_0 | f \rangle = 0$$

TÄMÄ SANOO: JOS $\langle \varphi_0 | f \rangle \neq 0$

YHTÄLÖLLÄ $\mathcal{L}_x u = f$ EI OLE REUNAEHTOJA

$$A_1 u(a) + A_2 u'(a) = 0 \qquad \text{(SÄÄNN. TAPAUS)}$$
$$B_1 u(b) + B_2 u'(b) = 0$$

TÄYTTÄVIÄ RATKAISUJA.

HUOM.

$$G(x,y) = + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{(\varphi_k, \varphi_k)}$$

ON SE GREENIN FUNKTIO, JOKA TOTEUTTAA SAMAT REUNAEHDOT KUIN OMINAISFUNKTIOT, S.O. (SÄÄNN. TAPAUS)

$$A_1 G(a,y) + A_2 \partial_x G(a,y) = 0$$
$$B_1 G(b,y) + B_2 \partial_x G(b,y) = 0$$

JA VASTAAVASTI y:LLE

. STURM-LIOUVILLE VARIAATIO-ONGELMANA

ISOPERIMETRINEN ONGELMA: (J.C.F. STURM 1803–1855, J. LIOUVILLE 1809–1882)

$$J[y] = \int_a^b dx \left(p(x)(y'(x))^2 + q(x)\, y^2(x) \right)$$

STATIONAARINEN EHDOLLA

$$K[y] = \int_a^b dx\, w(x)\, y^2(x) = 1$$

OTTAMALLA KÄYTTÖÖN LAGRANGEN KERROIN λ ON SIIS LÖYDETTÄVÄ FUNKTIONAALIN

$$L_\lambda[y] = \int_a^b dx \left[p(x)(y')^2 + (q(x) - \lambda w(x)) y^2(x) \right] + \lambda$$

EKSTREMAALIT

EULER: $-\frac{d}{dx}\left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + (q(x) - \lambda w(x))\, y = 0$

TÄMÄ ON <u>STURM-LIOUVILLEN</u> <u>YHTÄLÖ</u>

λ ON <u>OMINAISARVO</u>

$K[y] = 1$ ON OMINAISFUNKTIOIDEN NORMITUSEHTO

MEIDÄN ON OLTAVA TARKKOJA REUNAEHTOJEN SUHTEEN: VARIOIDAAN $y \to y + \eta$

TERMIN $\int_a^b dx\, p(x)(y')^2$ MUUTOS

$$\delta \int_a^b dx\, p(x)(y')^2 = 2 \int_a^b dx\, p(x)\, y'(x)\, \eta'(x) =$$

$$= 2 \Big/_a^b p(x)\, y'(x)\, \eta(x) - 2 \int_a^b dx\, \eta(x) \frac{d}{dx}\left(p(x)\, y'(x)\right)$$

OS. INTEGR.

EULERIN YHTÄLÖN PAIKKAANSAPITÄVYYS OK.

JOS $p(a)\, y'(a)\, \eta(a) = p(b)\, y'(b)\, \eta(b) = 0$

<u>SINGULAARINEN S-L</u>: $p(a) = 0$ JA/TAI $p(b) = 0$

MISSÄ $p = 0$ η SAA OLLA MIELIVALTAINEN

<u>SÄÄNNÖLLINEN S-L</u> $(p(a) \neq 0,\ p(b) \neq 0)$ OK, JOS EHTO PÄÄTEPISTEESSÄ P ON

$y(P) = 0 \Rightarrow \eta(P) = 0$

$y'(P) = 0 \Rightarrow \eta(P)$ MIELIV.,

MUTTA YLEISELLE HOMOG. REUNAEHDOLLE

$$A_1 y(P) + A_2 y'(P) = 0$$

~~ON~~ VARIAATIO η TOTEUTTAA MYÖS $A_1 \eta(P) + A_2 \eta'(P) = 0$

EIKÄ SIJOITUSTERMI $= 0$.

KUN HALUTAAN KÄSITELLÄ S-L:N YHTÄLÖÄ VARIAATIO-ONGELMAN EULERIN YHTÄLÖNÄ, ON SIIS RAJOIDUTTAVA REUNAEHTOIHIN

$$p(x)\, y(x)\, y'(x) = 0 \quad x = a, b \quad (R)$$

OLETAMME JATKOSSA ETTÄ (R) PÄTEE

REUNAEHTOJEN $p(x)\, y(x)\, y'(x) = 0$ $x = a, b$ VALLITESSA

$$J[y] = + \int_a^b dx\, y(x) \left[-\frac{d}{dx}\left(p(x) \frac{dy}{dx}\right) + q(x)\, y(x) \right]$$

S-L OMINAISFUNKTIOT $u_k(x)$:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x) \frac{du_k}{dx}\right) + q(x)\, u_k(x) = +\lambda_k\, w(x)\, u_k(x)$$

VOIDAAN OLETTAA ORTONORMITETUIKSI

$$\int_a^b dx\, w(x)\, u_k(x)\, u_l(x) = \delta_{kl}.$$

NE MUODOSTAVAT TÄYDELLISEN FUNKTIOJOUKON, JOTEN VOIDAAN KEHITTÄÄ

$$y(x) = \sum_k a_k u_k(x)$$

$$\Rightarrow J[y] = \sum_{k,l} a_k \lambda_l a_l \int_a^b dx\, w(x)\, u_k(x)\, u_l(x)$$

$$= \sum_k \lambda_k a_k^2$$

SIDOSEHTO $K[y] = \sum_k a_k^2 = 1$

OLKOON λ_0 PIENIN OMINAISARVO $\lambda_k \geq \lambda_0 \ \forall k$

JOS λ_0 EI OLE DEGENEROITUNUT

SAAVUTTAA $J[y]$ ABSOLUUTTISEN MINIMINSÄ $= \lambda_0$

KUN $y(x) = \pm u_0(x)$ $(a_0^2 = 1)$

(λ_0 DEG.: $u_0^{(1)}, \ldots, u_0^{(N)}$ $\mathcal{L} u_0^{(i)} = \lambda_0 u_0^{(i)}$

OM. FUNKTIOT, ORTORMITETTUNA

MINIMI: MIKÄ TAHANSA YHDISTELMÄ $y(x) = \sum_i^N b_i u_0^{(i)}(x)$)

<u>LIKIARVON</u> MINIMILLE SAAMME LÄHTEMÄLLÄ PARAMETREISTÄ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ RIIPPUVASTA YRITTEESTÄ

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_p; x),$$

LASKEMALLA

$$J[f(\alpha_1, \ldots, \alpha_p; x)] = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$$

JA

$$K[f(\alpha_1, \ldots, \alpha_p; x)] = G(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$$

SEKÄ SEN JÄLKEEN LÖYTÄMÄLLÄ FUNKTION F MINIMI EHDOLLA $G = 1$, ELI

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \alpha_j}\Big(F + \underset{\uparrow \text{ LAGR. KERROIN}}{\mu} G\Big) = 0 \\ G = 1 \end{cases}$$

"RAYLEIGH - RITZ"

RATKAISU ANTAA <u>YLÄRAJAN</u> J:N MINIMIARVOLLE.

JOHN WILLIAM STRUTT (LORD RAYLEIGH) 1842 - 1919

RAYLEIGH - RITZ

LÖYDÄ FUNKTIONAALIN $\left(\mathcal{L} = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)\right)$, $a \le x \le b$

$$F_{RR}[u] = \frac{N[u]}{D[u]}$$

$$N[u] = \int_a^b dx\ u(x)\, \mathcal{L}\, u(x)$$

$$= \int_a^b dx \left[p(x)(u'(x))^2 + q(x) u^2(x) \right] - \Big(p(b)u'(b)u(b) - p(a)u'(a)u(a)\Big)$$

(SEKÄ SÄÄNN. ETTÄ SING.)

$$D[u] = \int_a^b dx\ w(x)\, u^2(x)$$

STATIONAARISET PISTEET

OLKOON NORMITETUT : $\int_a^b dx\, w(x)\, \varphi_n^2(x) = 1$

STURM - LIOUVILLEN YHTÄLÖN OMINAISFUNKTIOT $\varphi_n(x)$, OM. ARVOT λ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\lambda_i < \lambda_{i+1}$ $i = 0, 1, \ldots$

ELI

$$\mathcal{L}\varphi_n(x) = \lambda_n w(x) \varphi_n(x)$$

$$\int_a^b dx\ w(x)\, \varphi_m(x)\, \varphi_n(x) = \delta_{mn}$$

RATKAISU LÖYTYY, JOS

$\{\varphi_n(x)\}$ TÄYDELLINEN FUNKTIOJOUKKO; (AINA SÄÄNNÖLLISELLE S-L)

KIRJ.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

$$\bullet\ N[u] = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_m a_n \int_a^b dx\, \varphi_m(x) \mathcal{L} \varphi_n(x)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_m a_n \lambda_n \delta_{mn}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n^2$$

$$D[u] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

$$\Rightarrow F_{RR}[u] = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n^2}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2} = f_{RR}(a_0, a_1, a_2, \dots)$$

STAT. PISTEET:

$$\frac{\partial f_{RR}}{\partial a_i} = 0 = \frac{2\lambda_i a_i}{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\right)} - \frac{\sum_0^{\infty} \lambda_n a_n^2}{\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\right)^2} 2a_i$$

ELI
$$\lambda_i = \frac{\sum_0^{\infty} \lambda_n a_n^2}{\sum_0^{\infty} a_n^2}$$

RATKAISU: $a_n = 0 \quad n \neq i$
$a_i \neq 0$ MIELIVALTAINEN eli $u = C_i \varphi_i(x)$ (MIELIV. VAKIO $\neq 0$)

$F_{RR}[C_i \varphi_i(x)] = \lambda_i$ (EI RIIPU C_i:N ARVOSTA)

MINIMI: $F[C_0 \varphi_0] = \lambda_0$ EI 1-KÄS. C_0 "MODULUS"

MUUT RATK. "SATULAPISTEITÄ"

HUOM. FUNKTIOT $u = C_n \varphi_n(x)$ MINIMEJÄ FUNKTIONAALILLE $F_{RR}[u]$ ALIAVARUUDESSA

$$\mathcal{F}_n = \left\{ u(x) \,\middle|\, \int_a^b dx\, w(x)\, u(x)\, \varphi_k(x) = 0,\ k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}$$

VEKTORIAVARUUDET

K KUNTA $(K = \mathbb{R}, \mathbb{C})$

ALKIOIDEN $\vec{u}, \vec{v}, \ldots$ JOUKKO V ON <u>VEKTORIAVARUUS</u>, JOS JOKAISTA ALKIOPARIA $\vec{u}, \vec{v}$ VOIDAAN ASETTAA VASTAAMAAN KOLMAS V:N ALKIO $\vec{u}+\vec{v}$, JA JOKAISTA PARIA $a \in K$, $\vec{v} \in V$ ALKIO $a\vec{v} \in V$ S.E.

1° $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$

2° $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$

3° $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u}+a\vec{v}$

4° $(a+b)\vec{u} = a\vec{u}+b\vec{u}$

5° $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$

6° $1\cdot\vec{u} = \vec{u}$

7° ON OLEMASSA $\vec{0} \in V$ S.E. $\vec{0}+\vec{u} = \vec{u} \quad \forall \vec{u} \in V$

8° JOKAISTA $\vec{u} \in V$ VASTAA $-\vec{u} \in V$ S.E. $\vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{0}$

($\Rightarrow$ M.M. $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$, $0\cdot\vec{u} = \vec{0}$ JNE.)

VEKTORIT $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_N$ OVAT <u>LINEAARISESTI RIIPPUMATTOMAT</u>, JOS $\sum_{k=1}^{N} a_k \vec{v}_k = \vec{0}$ VAIN KERTOIMIEN ARVOILLA $a_1 = a_2 = \cdots = a_N = 0$.
MUUSSA TAPAUKSESSA VEKTORIT OVAT LINEAARISESTI RIIPPUVAT. (AINA LIN. RIIPPUVAT JOS YKSIKIN $= \vec{0}$)

JOUKKO $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots\}$ <u>VIRITTÄÄ</u> V:N JOS JOKAINEN $\vec{u} \in V$ VOIDAAN LAUSUA MUODOSSA

$$\vec{u} = \sum_k a_k \vec{w}_k$$

JOS $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots\}$ LISÄKSI LIN. RIIPPUMATTOMAT, NE MUODOSTAVAT V:N <u>KANNAN</u>

KANNASSA AINA SAMA LUKUMÄÄRÄ VEKTOREITA = V:N <u>DIMENSIO</u> DIM(V) (VOI OLLA ∞)

<u>ESIMERKKEJÄ</u>

1° $\vec{u} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ $\qquad x_i \in \mathbb{R}$ TAI $x_i \in \mathbb{C}$

$\vec{u}+\vec{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_N) + (y_1, y_2, \ldots, y_N) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_N+y_N)$

$\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$, $-\vec{u} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_N)$

$a\vec{u} = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_N)$

KANTA $\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$
$\vec{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$
$\vdots$
$\vec{e}_N = (0, 0, \ldots, 1)$

$\dim = N$

TÄSSÄ $N = \infty$ ON MYÖS MIELEKÄS

2° V = FUNKTIOT $f : A \to \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$

$(f+g)(z) = f(z) + g(z)$
$(af)(z) = af(z)$ $\qquad a \in \mathbb{C}$
$\vec{0}(z) = 0 \quad \forall z \in A$
$(-f)(z) = -f(z)$

DIM $= \infty$

3° ASTETTA N-1 OLEVAT POLYNOMIT

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{N-1} z^{N-1}$$

LASKUTOIMITUKSET KUTEN ESIM. 2°:SSA

KANTA: $\{1, z, z^2, \ldots, z^{N-1}\}$

DIM $= N$

VEKTORIAVARUUS V ON <u>NORMITETTU</u>, JOS LÖYTYY FUNKTIO $\| \ \| : V \to \mathbb{R}$ S.E.

$\|\vec{v}\| \geq 0 \quad \forall \ \vec{v} \in V$

$\|\vec{v}\| = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$

$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \quad \forall \ \vec{u}, \vec{v} \in V$ "KOLMIOEPÄYHTÄLÖ"

$\|a\vec{u}\| = |a| \, \|\vec{u}\|$

<u>ESIM.</u> 1° $\|(x_1, x_2, \ldots, x_N)\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_N|^2}$

2° $\|f\| = \sup_{z \in A} |f(z)|$ (PIENIN YLÄRAJA)

NORMI MAHDOLLISTAA ETÄISYYDEN ELI <u>METRIIKAN</u>:

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

JONO $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots$ <u>SUPPENEE</u> KOHTI $\vec{v} \in V$ JOS

$$\lim_{n \to \infty} \|\vec{v}_n - \vec{v}\| = 0 \quad , \text{ MERK. } \lim_{n \to \infty} \vec{v}_n = \vec{v}$$

<u>CAUCHYN JONO</u> TOTEUTTAA (AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY 1789-1857)

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \|\vec{v}_m - \vec{v}_n\| = 0$$

SUPPENEVA JONO ON AINA CAUCHYN JONO

$(\|\vec{v}_m - \vec{v}_n\| = \|\vec{v}_m - \vec{v} - (\vec{v}_n - \vec{v})\| \leq \|\vec{v}_m - \vec{v}\| + \|\vec{v}_n - \vec{v}\| \to 0)$

MUTTA EI VÄLTTÄMÄTTÄ PÄINVASTOIN.

V ON <u>TÄYDELLINEN</u> (COMPLETE), JOS JOKAINEN CAUCHYN JONO SUPPENEE, ELI

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \|\vec{v}_m - \vec{v}_n\| = 0 \Rightarrow \exists \vec{v} \in V \text{ S.E. } \lim_{n \to \infty} \vec{v}_n = \vec{v}$$

NORMITETTU, TÄYDELLINEN VEKTORIAVARUUS = <u>BANACHIN AVARUUS</u> (STEFAN BANACH 1892-1945)

SISÄTULOAVARUUDET

$K = \mathbb{C}$ TÄSTÄ ETEENPÄIN, $K = \mathbb{R}$ SAADAAN JÄTTÄMÄLLÄ KOMPL. KONJUGOINNIT POIS

SKALAARITULO ELI <u>SISÄTULO</u>: FUNKTIO $V \times V \to \mathbb{C}$, $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle \in \mathbb{C}$ S.E.

1° $\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle \in \mathbb{R}$, $\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle \geq 0 \quad \forall \vec{u} \in V$

2° $\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

3° $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \langle \vec{v} | \vec{u} \rangle^*$

4° $\langle \vec{u} | \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle + \langle \vec{u} | \vec{w} \rangle$

5° $\langle \vec{u} | a\vec{v} \rangle = a \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$

ESIM. $\langle (x_1, x_2, \ldots, x_N) | (y_1, y_2, \ldots, y_N) \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i^* y_i$

<u>SCHWARZIN EPÄYHTÄLÖ</u>: SISÄTULOAVARUUDESSA PÄTEE AINA

$$|\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle|^2 \leq \langle \vec{u} | \vec{u} \rangle \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle ,$$

YHTÄLÄISYYS "=" PÄTEE JOS JA VAIN JOS $\vec{u}, \vec{v}$ LINEAARISESTI RIIPPUVIA

(HERMANN SCHWARZ 1843 - 1921)

$$|\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle|^2 \le \langle \vec{u}|\vec{u}\rangle\langle \vec{v}|\vec{v}\rangle$$

TODISTUS: JOS $\vec{v} = \vec{0}$ TULOS SEURAA $(0 = 0)$

OL. $\vec{v} \neq \vec{0}$ ELI $\langle \vec{v}|\vec{v}\rangle > 0$

MUOD. $\vec{w} = \vec{u} - \dfrac{\langle \vec{v}|\vec{u}\rangle}{\langle \vec{v}|\vec{v}\rangle}\vec{v}$

$$\Rightarrow \langle \vec{w}|\vec{w}\rangle = \langle \vec{u}|\vec{u}\rangle - \frac{\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle\langle \vec{v}|\vec{u}\rangle}{\langle \vec{v}|\vec{v}\rangle} - \frac{\langle \vec{v}|\vec{u}\rangle\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle}{\langle \vec{v}|\vec{v}\rangle}$$

$$+ \frac{|\langle \vec{v}|\vec{u}\rangle|^2\langle \vec{v}|\vec{v}\rangle}{\langle \vec{v}|\vec{v}\rangle^2} = \langle \vec{u}|\vec{u}\rangle - \frac{|\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle|^2}{\langle \vec{v}|\vec{v}\rangle} \geq 0$$

$$\Rightarrow \langle \vec{u}|\vec{u}\rangle\langle \vec{v}|\vec{v}\rangle \geq |\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle|^2$$

"=" PÄTEE JOSS $\vec{w} = \vec{0}$ ELI $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ □.

LAUSE SISÄTULOAVARUUS ON NORMITETTU AVARUUS KUN NORMIKSI OTETAAN

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}|\vec{u}\rangle}$$

TOD. MUUT OMINAISUUDET ILMEISET, PAITSI KOLMIOEPÄYHTÄLÖ: $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \langle \vec{u}+\vec{v}|\vec{u}+\vec{v}\rangle = \langle \vec{u}|\vec{u}\rangle +$

$+ \langle \vec{u}|\vec{v}\rangle + \langle \vec{v}|\vec{u}\rangle + \langle \vec{v}|\vec{v}\rangle = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle$

$\le \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2|\langle \vec{u}|\vec{v}\rangle| \underset{\text{SCHWARZ}}{\le} \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\sqrt{\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2}$

$= (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$ □

TÄYDELLINEN SISÄTULOAVARUUS

= <u>HILBERT(IN)</u> <u>AVARUUS</u> (DAVID HILBERT 1862-1943)

ESIMERKKEJÄ HILBERTIN AVARUUKSISTA

1° $V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_N)\}$, SISÄTULO KUTEN AIKAISEMMIN

2° ℓ^2 : JONOT $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \equiv x$ $\quad x_i \in \mathbb{C}$

JOILLE $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$

$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^* y_i \qquad \|x\|^2 = \sum_1^{\infty} |x_i|^2$$

KANTA: $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$, $e_3 = (0, 0, 1, \ldots)$ $\qquad (e_n)_i = \delta_{ni}$

$\|e_n\|^2 = 1 \qquad \langle e_n|e_m\rangle = \delta_{nm}$ "ORTONORMITETTU KANTA"

3° $L^2([a, b])$: FUNKTIOT $[a, b] \to \mathbb{C}$ JOILLE

$$\int_a^b dx\, |f(x)|^2 < \infty$$

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b dx\, f^*(x)\, g(x), \quad \|f\|^2 = \int_a^b dx\, |f(x)|^2$$

$$\|f-g\|^2 = \int_a^b dx\, |f(x)-g(x)|^2$$

PITÄÄ OLLA: $\|f-g\| = 0 \Leftrightarrow f = g$

S.O. ON <u>SAMAISTETTAVA</u> FUNKTIOT f JA g

JOS $\int dx\, |f(x)-g(x)|^2 = 0$

$f = g$ JOS $f(x) = g(x)$ <u>MELKEIN KAIKKIALLA</u>

JØRGEN PEDERSEN GRAM 1850–1916
ERHARD SCHMIDT 1876–1959

GRAM-SCHMIDT ORTONORMITUSPROSEDUURI

V SISÄTULOAVARUUS, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots$ LIN. RIIPPUMATTOMIA VEKTOREITA. VOIMME RAKENTAA NIISTÄ <u>ORTONORMITETUN</u> <u>JOUKON</u> $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots$;

$\langle \vec{e}_i | \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ SEURAAVASTI.

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} \qquad \langle \vec{e}_1 | \vec{e}_1 \rangle = 1$$

$$\vec{e}_2 = k_2 \left(\vec{v}_2 - \langle \vec{e}_1 | \vec{v}_2 \rangle \vec{e}_1 \right) \quad \text{TOTEUTTAA}$$

$$\langle \vec{e}_1 | \vec{e}_2 \rangle = k_2 \Big(\langle \vec{e}_1 | \vec{v}_2 \rangle - \langle \vec{e}_1 | \vec{v}_2 \rangle \underbrace{\langle \vec{e}_1 | \vec{e}_1 \rangle}_{=1} \Big) = 0$$

k_2 MÄÄRÄYTYY EHDOSTA

$$1 = \langle \vec{e}_2 | \vec{e}_2 \rangle = |k_2|^2 \left(\|\vec{v}_2\|^2 - |\langle \vec{e}_1 | \vec{v}_2 \rangle|^2 \right)$$

SCHWARZIN EPÄYHTÄLÖN MUKAAN

$$|\langle \vec{e}_1 | \vec{v}_2 \rangle|^2 < \|\vec{e}_1\|^2 \|v_2\|^2 = \|\vec{v}_2\|^2 \Rightarrow \ne 0$$

AITO EPÄYHTÄLÖ, KOSKA $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ LIN. RIIPPUMATTOMAT

$$\Rightarrow \quad k_2 = \frac{1}{\sqrt{\|v_2\|^2 - |\langle \vec{e}_1 | \vec{v}_2 \rangle|^2}} \quad \text{KELPAA}$$

JATKETAAN; OLKOON $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ RAKENNETTU $\langle \vec{e}_i | \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$

ASETETAAN

$$\vec{e}_{n+1} = k_{n+1} \Big(\vec{v}_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \langle \vec{e}_j | \vec{v}_{n+1} \rangle \vec{e}_j \Big)$$

TOTEUTTAA $\langle \vec{e}_j | \vec{e}_{n+1} \rangle = 0 \quad j = 1, \dots, n$

$|k_{n+1}|$ MÄÄRÄYTYY EHDOSTA $\langle \vec{e}_{n+1} | \vec{e}_{n+1} \rangle = 1$

OLKOON NYT $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ ORTONORMITETTU (≡ O.N.) JOUKKO V:N ALKIOITA : $\langle \vec{u}_j | \vec{u}_k \rangle = \delta_{jk}$

VEKTORIEN $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ <u>VIRITTÄMÄ</u> <u>ALIAVARUUS</u> L MUODOSTUU KAIKISTA VEKTOREISTA MUOTOA

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^{n} a_j \vec{u}_j$$

ANNETTU $\vec{v} \in V$, KYSYTÄÄN MIKÄ L:N VEKTORI $\vec{u}$ APPROKSIMOI $\vec{v}$:TÄ PARHAITEN, S.O. MILLE $\vec{u}$ $\|\vec{v} - \vec{u}\|$ ON MINIMI? KIRJ. $\vec{u} = \sum a_j \vec{u}_j$

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \langle \vec{v} - \vec{u} | \vec{v} - \vec{u} \rangle$$
$$= \|v\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \left(a_j^* \langle \vec{u}_j | \vec{v} \rangle + a_j \langle \vec{v} | \vec{u}_j \rangle \right) + \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2$$

KIRJ $a_j = b_j + i c_j \qquad b_j, c_j \in \mathbb{R}$

$$F = \sum_{j=1}^{n} \Big[b_j^2 + c_j^2) - (b_j - i c_j) \langle \vec{u}_j | \vec{v} \rangle - (b_j + i c_j) \langle \vec{v} | \vec{u}_j \rangle \Big] + \|\vec{v}\|$$

$$\frac{\partial F}{\partial b_j} = 2 b_j - \left(\langle \vec{u}_j | \vec{v} \rangle + \langle \vec{v} | \vec{u}_j \rangle \right) = 2\left(b_j - \mathrm{Re} \langle \vec{u}_j | \vec{v} \rangle \right) = 0$$

$$\Rightarrow b_j = \mathrm{Re} \langle \vec{u}_j | \vec{v} \rangle$$

$$\frac{\partial F}{\partial c_j} = 2 c_j + i\left(\langle \vec{u}_j | \vec{v} \rangle - \langle \vec{v} | \vec{u}_j \rangle \right) = 2\left(c_j - \mathrm{Im} \langle \vec{u}_j | \vec{v} \rangle \right) = 0$$

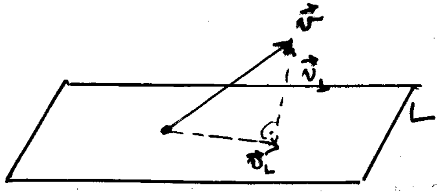
$$\Rightarrow c_j = \mathrm{Im} \langle \vec{u}_j | \vec{v} \rangle$$

$$\Rightarrow \quad a_j = \langle \vec{u}_j | \vec{v} \rangle$$

(HUOM: HETI: $\dfrac{\partial F}{\partial a_j} = -\langle \vec{v} | \vec{u}_j \rangle + a_j^* = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial a_j^*} = -\langle \vec{u}_j | \vec{v} \rangle + a_j = 0$ $\Rightarrow a_j = \langle \vec{u}_j | \vec{v} \rangle$)

"PARAS" $\vec{u} = \sum_{j=1}^{n} \langle \vec{u}_j | \vec{v} \rangle \vec{u}_j \equiv \vec{v}_L$

MÄÄR. PROJEKTIO-OPERAATTORI P_L



$$P_L \vec{v} = \vec{v}_L = \sum_{j=1}^{n} \langle \vec{u}_j | \vec{v} \rangle \vec{u}_j$$

$\vec{v}$:N PROJEKTIO ALIAVARUUDELLE L

$$P_L \vec{v}_L = P_L^2 \vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \Big\langle \vec{u}_k \Big| \sum_{j=1}^{n} \langle \vec{u}_j | \vec{v} \rangle \vec{u}_j \Big\rangle \vec{u}_k = \sum_{k=1}^{n} \langle \vec{u}_k | \vec{v} \rangle \vec{u}_k = \vec{v}_L \quad \text{OK.}$$

$\Rightarrow$ $P_L^2 = P_L$ PROJEKTIO-OPERAATTORIEN KARAKTERISTINEN OMINAISUUS

MÄÄR. $\vec{v}_\perp = \vec{v} - \vec{v}_L$ $\vec{v}$:N L:ÄÄ VASTAAN KOHTISUORA OSA

$$P_L \vec{v}_\perp = P_L \vec{v} - P_L \vec{v}_L = \vec{v}_L - \vec{v}_L = \vec{0} \quad \text{OK.}$$

$\vec{u} \in L$ MIELIV. : $\vec{u} = \sum_i^n b_j \vec{u}_j$

$$\langle \vec{v}_\perp | \vec{u} \rangle = \sum_{j=1}^{n} b_j \langle \vec{v}_\perp | \vec{u}_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} b_j \Big(\langle \vec{v} | \vec{u}_j \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle \vec{u}_k | \vec{v} \rangle^* \delta_{kj} \Big) = 0$$

$\vec{v}_\perp$ ON SIIS KOHTISUORASSA JOKAISTA L:N VEKTORIA KOHTAAN, ERIKOISESTI

$$\langle \vec{v}_\perp | \vec{v}_L \rangle = 0 .$$

$$\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{v}_L + \vec{v}_\perp\|^2 = \|\vec{v}_L\|^2 + \|\vec{v}_\perp\|^2 \geq \|\vec{v}_L\|^2$$

ELI : $\|\vec{v}\|^2 \geq \sum_{j=1}^{n} |\langle \vec{u}_j | \vec{v} \rangle|^2$ BESSELIN EPÄYHTÄLÖ

JATKOSSA SELITETÄÄN:

JOS HILBERTIN AVARUUS $\mathcal{H}$ ON "SEPAROITUVA" SILLÄ ON NUMEROITUVA KANTA, JOKA VOIDAAN OLETTAA OLEVAN O.N. :

$$\langle \hat{e}_i | \hat{e}_j \rangle = \delta_{jk}$$

JOKAINEN $\vec{v} \in \mathcal{H}$ VOIDAAN LAUSUA

$$\vec{v} = \sum_k v_k \hat{e}_k$$

$$\langle \hat{e}_j | \vec{v} \rangle = \sum_k v_k \langle \hat{e}_j | \hat{e}_k \rangle = v_j$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \sum_k \langle \hat{e}_k | \vec{v} \rangle \hat{e}_k}$$

JA $\|\vec{v}\|^2 = \sum_{k,\ell} v_k^* v_\ell \langle \hat{e}_k | e_\ell \rangle = \sum_k |v_k|^2$, SIIS

$\|\vec{v}\|^2 = \sum_k |\langle \hat{e}_k | \vec{v} \rangle|^2$ PARSEVALIN IDENTITEETTI

(MARC-ANTOINE PARSEVAL DES CHÊNES 1755–1836)

ℓ^2 JA L^2 OVAT SEPAROITUVIA HILBERTIN AVARUUKSIA

ORTOGONAALISET POLYNOMIT

KÄYTÄNNÖSSÄ VAIN TÄMÄ TAPAUS

VÄLILLÄ $a \le x \le b$ MÄÄRITELLYT REAALISET POLYNOMIT $P(x)$ MUODOSTAVAT REAALIKERTOIMISEN VEKTORIAVARUUDEN

MÄÄR. SISÄTULO $(P,Q) = \int_a^b dx\, w(x)\, P(x)\, Q(x)$

MISSÄ PAINOFUNKTIO $w(x) > 0 \quad a < x < b$

NORMI $\quad \|P\|^2 = (P,P)$

WEIERSTRASSIN APPROKSIMAATIOLAUSE : MIKÄ TAHANSA VÄLILLÄ $a \le x \le b$ JATKUVA FUNKTIO VOIDAAN APPROKSIMOIDA MIELIVALTAISEN TARKASTI POLYNOMILLA :: ANNETTU $\varepsilon > 0$, LÖYTYY POLYNOMI P S.E

$$\|f - P\|^2 = \int_a^b dx\, w(x)\, |f(x) - P(x)|^2 < \varepsilon$$

VÄLILLÄ $a \le x \le b$ MÄÄR. JATKUVIEN FUNKTIOIDEN (VEKTORIAVARUUDEN) KANNAKSI KELPAA SIIS POLYNOMIT

$\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$

EIVÄT ORTOGONAALISIA : $(x^m, x^n) \neq 0 \quad m \neq n$

MUTTA VOIDAAN ORTOGONALISOIDA GRAM-SCHMIDT 'IN AVULLA.

ERI $[a,b]$ $w(x)$:N VALINNOILLA SAADAAN JOUKKO "ORTOGONAALISIA POLYNOMEJA".

ESIMERKKEJÄ :

1) $w(x) = 1 \qquad [a,b] = [-1,1]$

LEGENDREN POLYNOMIT $\quad P_n(x) \qquad n = 0, 1, 2, \dots$

P_n ASTETTA n $\quad$ (VRT. HARJ. 5.2)

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_m(x)\, P_n(x) = \frac{2}{2n+1}\, \delta_{mn}$$

HISTORIALLISISTA SYISTÄ

(ETUMERKKI VALITTU S.E. x^n:N KERROIN > 0 P_n:SSÄ)

NÄIDEN AVULLA VOIMME RAKENTAA ON POLYNOMI JOUKON VÄLILLÄ $[a,b]$:

$$\int_a^b dx\, p_m(x)\, p_n(x) = \delta_{mn}$$

VALITAAN $\quad p_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{b-a}}\; P_n\!\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right)$

LEGENDRE $\qquad t = \frac{2x-(b+a)}{b-a}$

(TOD. : $\displaystyle\int_a^b dx\, p_m(x)\, p_n(x) = \frac{\sqrt{(2m+1)(2n+1)}}{b-a} \int_a^b dx\, P_m\!\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right) P_n\!\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right)$

$dx = \frac{b-a}{2}dt$

$$= \frac{\sqrt{(2m+1)(2n+1)}}{b-a}\, \frac{b-a}{2} \underbrace{\int_{-1}^{1} dt\, P_m(t)\, P_n(t)}_{\frac{2}{2n+1}\delta_{mn}}$$

$= \delta_{mn} \quad$ OK)

(TAFNUTI L. TSEBYSEFF 1821 – 1894)

2) TŠEBYŠEFFIN 1. LAJIN POLYNOMIT $T_n(x)$

$-1 \le x \le 1 \qquad w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} T_m(x)\, T_n(x) = 0 \qquad m \neq n$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} T_n^2(x) = \pi/2 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} T_0^2(x) = \pi$$

2. LAJI : $-1 \le x \le 1 \qquad w(x) = \sqrt{1-x^2}$

$U_n(x)$

$$\int_{-1}^{1} dx \sqrt{1-x^2}\, U_m(x)\, U_n(x) = \frac{\pi}{2} \delta_{mn}$$

JOS VÄLI $[a, b]$ ON ÄÄRETÖN, $\int dx\, w(x) P^2(x)$ SAADAAN SUPPENEMAAN PAINOFUNKTION SOPIVAN VALINNAN AVULLA. NÄILLÄ POLYNOMEILLA VOIDAAN MIELIV. TARKASTI APPROKSIMOIDA JATKUVAT FUNKTIOT, JOILLE $\int dx\, w(x) f^2(x) < \infty$

3) $0 \le x < \infty \qquad w(x) = e^{-x}$

LAGUERREN POLYNOMIT $L_n(x)$:

$$\int_0^{\infty} dx\, e^{-x} L_m(x)\, L_n(x) = \delta_{mn} (n!)^2$$

4) $0 \le x < \infty \qquad w(x) = x^k e^{-x}$ (k ANNETTU)

LAGUERREN LIITTOPOLYNOMIT $L_n^k(x)$

$$\int_0^{\infty} dx\, e^{-x} x^k L_m^{(k)}(x)\, L_n^{(k)}(x) = \frac{[(n+k)!]^3}{n!} \delta_{mn}$$

5) $-\infty < x < \infty \qquad w(x) = e^{-x^2}$

HERMITEN POLYNOMIT $H_n(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} H_m(x)\, H_n(x) = 2^n \sqrt{\pi}\, n!\, \delta_{mn}$$

TIETOA ERIKOISFUNKTIOISTA :

M. ABRAMOWITZ & I.A. STEGUN : HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS (DOVER PUBL.)

NETISSÄ :

www.knovel.com/knovel2/Toc.jsp?BookID=528

www.convertit.com/Go/ConvertIt/Reference/AMS55.ASP

MUITA NETTILÄHTEITÄ :

mathworld.wolfram.com

functions.wolfram.com