OLKOON NYT $\mathcal{H}$ SEPAROITUVA JA $\{e_i\}$ O.N. KANTA, U UNITAARINEN

TÄLLÖIN MYÖS VEKTORIT $e_i' = Ue_i$ MUODOSTAVAT O.N. KANNAN

$$\langle e_i' | e_j' \rangle = \langle Ue_i | Ue_j \rangle = \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$$

KÄÄNTÄEN, JOS $\{e_i\}$ JA $\{e_i'\}$ OVAT KAKSI O.N. KANTAA, JA MÄÄRITELLÄÄN OPERAATTORI U YHTÄLÖLLÄ $Ue_i = e_i'$ $i = 1, 2, \ldots$, NIIN U ON UNITAARINEN: $(e_i = U^{-1} e_i')$

$$u = \sum_i u_i e_i \qquad v = \sum_i v_i e_i$$

$$\langle u | v \rangle = \sum_i u_i^* v_i$$

$$\langle Uu | Uv \rangle = \langle \sum_i u_i Ue_i | \sum_j v_j Ue_j \rangle$$

$$= \sum_{i,j} u_i^* v_j \langle e_i' | e_j' \rangle = \sum_i u_i^* v_i = \langle u | v \rangle$$

SIIS U UNITAARINEN.

SPEKTRAALITEORIA

1. OMINAISVEKTORIT

$\alpha \in \mathbb{C}$ ON RAJOITETUN OPERAATTORIN $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ OMINAISARVO JOS LÖYTYY $u \in \mathcal{H}$, $u \neq \vec{0}$ S.E.

$Au = \alpha u$. u ON OMINAISARVOA α VASTAAVA OMINAISVEKTORI (SUUNTA u). $Au = \alpha u \Rightarrow A(\beta u) = \alpha(\beta u)$, $\beta \in \mathbb{C}$. MONIKÄSITTEISYYTTÄ VOIDAAN RAJOITTAA VAATIMALLA ESIM. $\|u\| = 1$.

JOS MYÖS $Av = \alpha v$, $v \neq \beta u$ OMINAISARVO α ON DEGENEROITUNUT.

LAUSE HERMIITTISEN OPERAATTORIN OMINAISARVOT OVAT REAALISIA JA ERISUURIA OMINAISARVOJA VASTAAVAT OMINAISVEKTORIT OVAT ORTOGONAALISIA

TOD. (VRT. STORM-LIOUVILLE)

$$Au = \alpha u \Rightarrow \langle u | Au \rangle = \alpha \langle u | u \rangle = \alpha \|u\|^2$$

$$\overset{A^\dagger = A}{\parallel}$$

$$\langle A^\dagger u | u \rangle = \alpha^* \langle u | u \rangle = \alpha^* \|u\|^2$$

$\|u\| \neq 0$ JOTEN $\alpha^* = \alpha$

JOS LISÄKSI $Av = \beta v$

$$\langle u | Av \rangle = \beta \langle u | v \rangle = \langle A^\dagger u | v \rangle = \alpha \langle u | v \rangle$$

$$\Rightarrow (\alpha - \beta) \langle u | v \rangle = 0 \quad . \text{ MUTTA } \alpha \neq \beta$$

$$\Rightarrow \langle u | v \rangle = 0$$

$\square$.

HERMIITTINEN OPERAATTORI A ON <u>TÄYDELLINEN</u> JOS SEN OMINAISVEKTORIT MUODOSTAVAT TÄYDELLISEN O.N. JOUKON, S.O. MIELIV. $u \in \mathcal{H}$ VOIDAAN KEHITTÄÄ $u = \sum_\alpha c_\alpha u_\alpha \quad (A u_\alpha = \alpha u_\alpha)$

<u>ESIMERKKI.</u> PROJEKTIO-OPERAATTORIN OMINAISARVOT

$$Pu = \alpha u \Rightarrow P^2 u = \alpha P u = \alpha^2 u$$
$$\overset{\shortparallel}{Pu} = \alpha u$$

$\Rightarrow \alpha^2 = \alpha$ ELI $\alpha = 0, 1$

OMINAISARVOT OVAT 0 JA 1

P PROJISIO M:LLE $P = P_M$

$u \in M \quad Pu = u \quad$ OM. ARVO 1

$u \in M^\perp \quad Pu = \vec{0} \quad$ OM. ARVO 0

$u \in \mathcal{H}$

$u = u' + u'' \quad u' \in M, \ u'' \in M^\perp$

$\Rightarrow P$ TÄYDELLINEN

<u>LAUSE</u> UNITAARISEN OPERAATTORIN OMINAISARVOT OVAT MUOTOA $\alpha = e^{ia}$, $a \in \mathbb{R}$, JA ERISUURIA OMINAISARVOJA VASTAAVAT OMINAISVEKTORIT OVAT ORTOGONAALISIA

<u>TOD.</u> $Uu = \alpha u \quad \|u\|^2 = \|Uu\|^2 = \langle Uu | Uu \rangle =$
$= \langle \alpha u | \alpha u \rangle = \alpha^* \alpha \langle u | u \rangle = |\alpha|^2 \|u\|^2 \Rightarrow |\alpha| = 1$ ELI $\alpha = e^{ia}$

OLKOON LISÄKSI $Uv = \beta v$

$$\langle u | Uv \rangle = \beta \langle u | v \rangle = \langle U^\dagger u | v \rangle$$

MITÄ ON $U^\dagger u$? $\quad U^\dagger U = id \Rightarrow u = U^\dagger U u = \alpha U^\dagger u$

$\Rightarrow U^\dagger u = \alpha^{-1} u = \alpha^* u \quad (|\alpha| = 1)$

SIIS $\langle u | Uv \rangle = \beta \langle u | v \rangle = \langle \alpha^* u | v \rangle = \alpha \langle u | v \rangle$

$\Rightarrow (\alpha - \beta) \langle u | v \rangle = 0 \quad \& \ \alpha \neq \beta \Rightarrow \langle u | v \rangle = 0 \quad \square$.

2. RAJOITETUN OPERAATTORIN SPEKTRI

ÄÄRELLISULOTTEISESSA SISÄTULOAVARUUDESSA $(\dim V = n)$ ON KANNAN VALINNAN JÄLKEEN OPERAATTORI $\Leftrightarrow$ $n \times n$ MATRIISI. MATRIISILLA (ÄÄRELLISULOTTEISELLA) ON AINA OMINAISARVOJA ($\det(M - \lambda \mathbb{1}) = 0$ n:NNEN ASTEEN POLYNOMIYHTÄLÖ λ:SSA, ALGEBRAN PERUSLAUSEEN MUKAAN ON AINA OLEMASSA JUURIA) ÄÄRETÖNULOTTEISESSA AVARUUDESSA TILANNE MONIMUTKAISEMPI

ESIM. 1) $\mathcal{H} = \ell^2$

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$$

JOS $S(x_1, x_2, x_3, \dots) = \alpha(x_1, x_2, x_3, \dots)$
$\quad \overset{\shortparallel}{(0, x_1, x_2, \dots)} \quad \Rightarrow \alpha x_1 = 0 \quad$ JOKO 1) $x_1 = 0$

$\Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow \dots x_i = 0 \ \forall i \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$ EI OM. VEKTORI

TAI

a) [illegible] $= 0$, $x_2 = \alpha x_3 = 0$ [illegible]

[illegible] $\forall i$

⇒ [illegible]LLA S EI OLE OMINAISARVOA!

$$S'(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots) = \alpha(x_1, x_2, x_3, \dots)$$

$\Rightarrow$ $x_2 = \alpha x_1$, $x_3 = \alpha x_2 = \alpha^2 x_1$, $x_4 = \alpha x_3 = \alpha^3 x_1$ JNE.

$x_i = \alpha^{i-1} x_1$

$\Rightarrow$ OMINAISVEKTORI MUOTOA $\underline{x}_\alpha = x_1(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots)$

$$\|\underline{x}_\alpha\|^2 = |x_1|^2 \sum_0^\infty |\alpha|^{2n} < \infty \quad \text{jos } |\alpha| < 1$$

• JOKAINEN $\alpha \in \mathbb{C}$ S.E. $|\alpha| < 1$ ON OMINAISARVO!

HUOMAA ERO! (VAIKKA $S' = S^+$)

2) $\mathcal{H} = L^2([a,b])$

MÄÄRITELLÄÄN OPERAATTORI X $(Xf)(x) = x f(x)$

($\|Xf\|^2 = \int_a^b dx\, x^2 |f(x)|^2 \leq M^2 \int_a^b dx\, |f(x)|^2 = M^2 \|f\|^2$

MISSÄ $M = \max(|a|, |b|)$

X RAJOITETTU JA HERMIITTINEN (TODISTA!))

OMINAISFUNKTIO $f_\lambda(x)$ TOTEUTTAISI

$$x f_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x) \qquad x \in [a,b]$$

⇒ $f_\lambda(x) = 0$ AINOA RATKAISU $\in L^2([a,b])$

([illegible] $f_\lambda(x) = \delta(x-\lambda)$ KÄVISI, MUTTEI KUULU [illegible])

TARVITAAN UUSI KÄSITE, JOKA OTTAISI HUOMIOON ESIMERKIN 2 KALTAISET TAPAUKSET

JOS λ ON A:N OMINAISARVO $(A - \lambda\, id)^{-1}$ EI OLE OLEMASSA:

(JOS $(A - \lambda\, id)^{-1}$ ON OLEMASSA JA $Au = \lambda u$

$\Rightarrow$ $u = (A - \lambda\, id)^{-1}(A - \lambda\, id)u = (A - \lambda\, id)^{-1}\vec{0} = \vec{0}$)

MÄÄRITELMÄ $\lambda \in \mathbb{C}$ ON OPERAATTORIN A SÄÄNNÖLLINEN ARVO (ENG. REGULAR VALUE)

JOS $(A - \lambda\, id)^{-1}$ ON OLEMASSA JA ON RAJOITETTU

MÄÄRITELMÄ OPERAATTORIN A SPEKTRI

$$\Sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ EI OLE A:N SÄÄNNÖLLINEN ARVO}\}$$

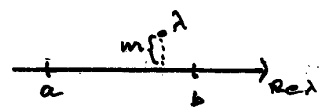
A:N KAIKKI OMINAISARVOT $\in \Sigma(A)$

OMINAISARVOT = "PISTESPEKTRI"

MUUT SPEKTRIN PISTEET = "JATKUVA SPEKTRI"

ESIMERKKI: OPERAATTORI X $L^2([a,b])$:LLÄ

JOS $\lambda \notin [a,b]$ (SIIS $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$ TAI $\mathrm{Im}\lambda = 0$ JA $\lambda < a$ TAI $\lambda > b$)



$$(X - \lambda\, id) f(x) = (x - \lambda) f(x)$$

$$(X - \lambda\, id)^{-1} f(x) = \frac{1}{x-\lambda} f(x)$$

$$\int_a^b dx \frac{1}{|x-\lambda|^2} |f(x)|^2 \leq \frac{1}{m^2} \int_a^b dx\, |f(x)|^2 = \frac{1}{m^2}\|f\|^2$$

m = "λ:N ETÄISYYS JANASTA $[a,b]$"

$(X - \lambda\, id)^{-1}$ SIIS OLEMASSA JA RAJOITETTU

$\Rightarrow \lambda$ SÄÄNNÖLLINEN ARVO

$\Sigma(X) = \{\lambda \mid a \le \lambda \le b\}$ PUHDAS JATKUVA SPEKTRI

LAUSE OLKOON A HILBERT AVARUUDEN $\mathcal{H}$ RAJOITETTU OPERAATTORI. TÄLLÖIN

a) $\lambda \in \Sigma(A) \Rightarrow |\lambda| \le \|A\|$

b) A:N SÄÄNNÖLLISTEN ARVOJEN JOUKKO ON AVOIN

c) $\Sigma(A)$ ON $\mathbb{C}$:N KOMPAKTI OSAJOUKKO

TODISTUS

a) OLKOON λ S.E. $|\lambda| > \|A\|$. OPERAATTORIN $\frac{1}{\lambda}A$ NORMI ON TÄLLÖIN < 1

$$\Rightarrow \left(id - \frac{1}{\lambda}A\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n \quad \text{ON OLEMASSA}$$

$$A - \lambda \cdot id = \lambda\left(\frac{A}{\lambda} - id\right)$$

$$\Rightarrow (A - \lambda\, id)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(id - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} \quad \text{ON OLEMASSA}$$

$\Rightarrow \lambda$ SÄÄNNÖLLINEN

SIIS JOS $\lambda \in \Sigma(A)$ ON OLTAVA $\lambda \le \|A\|$

b) OLKOON $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ SÄÄNNÖLLINEN ARVO JA $\lambda \in \mathbb{C}$

MVO. $B = id - (A - \lambda_0 id)^{-1}(A - \lambda\, id)$

$= (A - \lambda_0 id)^{-1}\left[(A - \lambda_0 id) - (A - \lambda\, id)\right]$

$= (A - \lambda_0 id)^{-1}(\lambda - \lambda_0)\, id$

$\Rightarrow \|B\| = |\lambda - \lambda_0| \, \|(A - \lambda_0 id)^{-1}\|$

JOS $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(A - \lambda_0 id)^{-1}\|}$ $\quad \|B\| < 1$

JA ON OLEMASSA

$$(id - B)^{-1} = \left[(A - \lambda_0 id)^{-1}(A - \lambda\, id)\right]^{-1}$$

$$= (A - \lambda\, id)^{-1}(A - \lambda_0 id)$$

$\Rightarrow \lambda$ MYÖS SÄÄNNÖLLINEN

$\Rightarrow$ SÄÄNNÖLLISTEN ARVOJEN JOUKKO AVOIN

c) $\Sigma(A) = \mathbb{C} - \{\text{SÄÄNNÖLLISET ARVOT}\}$

ON b)-KOHDAN MUKAAN SULJETTU (AVOIMEN JOUKON KOMPLEMENTTINA) JA a)-KOHDAN MUKAAN RAJOITETTU

$\Rightarrow \Sigma(A)$ KOMPAKTI $\square$.

HERMIITTISEN OPERAATTORIN SPEKTRI

LAUSE (RAJOITETUN) HERMIITTISEN OPERAATTORIN A SPEKTRI $\Sigma(A)$ ON REAALINEN

<u>TODISTUS</u>. OLKOON $\lambda = a + ib$, $b \neq 0$ JA $V = \{ (A - \lambda id)u \mid u \in \mathcal{H} \}$. OSOITETAAN ENSIN ETTÄ V ON $\mathcal{H}$:N ALIAVARUUS, V:N VEKTORIALIAVARUUS-OMINAISUUS SELVÄ. TÄYDELLISYYS: OLKOON $v_n = (A - \lambda id)u_n \to v$ SUPPENEVA JONO. ON OSOITETTAVA ETTÄ $v \in V$.

$w \in \mathcal{H}$ MIELIV. $\|(A - \lambda id)w\|^2 = \langle Aw - \lambda w \mid Aw - \lambda w\rangle$

$= \|Aw\|^2 + |\lambda|^2\|w\|^2 - \lambda \underbrace{\langle Aw \mid w\rangle}_{=\langle w \mid Aw\rangle} - \lambda^* \langle w \mid Aw\rangle$

$= \|Aw\|^2 + |\lambda|^2\|w\|^2 - \underbrace{(\lambda + \lambda^*)}_{2a}\langle w \mid Aw\rangle$

$= \|Aw\|^2 + |a|^2\|w\|^2 - a(\langle w|Aw\rangle + \langle Aw|w\rangle) + |b|^2\|w\|^2$

$= \|(A - a\, id)w\|^2 + |b|^2\|w\|^2$

$\Rightarrow \|w\|^2 = \frac{1}{|b|^2}\left(\|(A - \lambda id)w\|^2 - \|(A - a id)w\|^2\right)$

$\leq \frac{1}{|b|^2}\|(A - \lambda id)w\|^2$

$\Rightarrow \|w\| \leq \frac{1}{|b|}\|(A - \lambda id)w\| \qquad (1)$

$\Rightarrow \|u_n - u_m\| \overset{(1)}{\leq} \frac{1}{|b|}\|(A - \lambda id)(u_n - u_m)\| = \frac{1}{|b|}\|v_n - v_m\| \to 0$

ELI (u_n) SUPPENEVA JONO.

$\{u_n\}$ ON SIIS CAUCHYN JONO, SUPPENEE $u_n \to u$

MUTTA $A - \lambda id$ ON JATKUVA OPERAATTORI, SIIS

$(A - \lambda \cdot id)u = \lim_{n\to\infty}(A - \lambda id)u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = v$

SIIS $v \in V$.

OLKOON NYT $w \in V^\perp \Rightarrow$

$\langle (A - \lambda id)u \mid w\rangle = \langle u \mid (A - \lambda^* id)w\rangle = 0 \quad \forall u \in \mathcal{H}$

VALITAAN $u = (A - \lambda^* id)w \Rightarrow Aw = \lambda^* w$

JOS $w \neq \vec{0}$ ON SIIS $\lambda^* = a - ib$, $b \neq 0$ A:N OMINAISARVO. MUTTA $A^+ = A$, JA KAIKKI OMINAISARVOT OVAT REAALISIA $\Rightarrow w = \vec{0}$ AINOA MAHDOLLISUUS $\Rightarrow V^\perp = \{\vec{0}\} \Rightarrow V = \mathcal{H}$

OLEMME OSOITTANEET: JOKAINEN $v \in \mathcal{H}$ VOIDAAN KIRJOITTAA MUOTOON $v = (A - \lambda id)u$ JOLLEKIN $u \in \mathcal{H}$. TÄSSÄ u ON 1-KÄS., SILLÄ JOS

$(A - \lambda id)u_1 = (A - \lambda id)u_2 \Rightarrow A(u_1 - u_2) = \lambda(u_1 - u_2)$

MUTTA $\lambda \notin \mathbb{R}$, SIIS EI OMINAISARVO $\Rightarrow u_1 - u_2 = \vec{0}$

ELI $u_1 = u_2$.

MÄÄR. OP. B: $u = Bv$. ILMEISESTI

$B(A - \lambda \cdot id) = id$ ELI $B = (A - \lambda id)^{-1}$ ON OLEMASSA $\Rightarrow \lambda$ SÄÄNNÖLLINEN ARVO

$\Rightarrow \Sigma(A) \subset \mathbb{R}$ $\square$.

SPEKTRAALIESITYS

([illegible] [illegible]ÄLLINEN ESITYS VAATIVA, [illegible] [illegible]ELEMÄÄN TEORIAA)

ALOITETAAN YKSINKERTAISIMMASTA TAPAUKSESTA:

A HERMIITTINEN, TÄYDELLINEN, $\mathcal{H}$ SEPAROITUVA

* A:N OMINAISVEKTOREISTA VOIDAAN RAKENTAA O.N. KANTA $\{e_{nk}\}$

$$A e_{nk} = \lambda_n e_{nk} \qquad k = 1, \dots, D_n$$

D_n: OMINAISARVON λ_n DEGENERAATIOASTE

$$\langle e_{nk} | e_{m\ell} \rangle = \delta_{mn} \delta_{k\ell}$$

$$u \in \mathcal{H} \qquad u = \sum_n \sum_{k=1}^{D_n} c_{nk} e_{nk}$$

OMINAISARVOT λ_n DISKREETTEJÄ, JÄRJESTETÄÄN KASVAVAAN JONOON

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

- P_n OLKOON PROJEKTIO-OPERAATTORI ALIAVARUUTEEN JOKA VASTAA OMINAISARVOA λ_n ("λ_n:N OMINAISAVARUUS", VEKTORIEN $e_{n1}, \dots, e_{nD_n}$ VIRITTÄMÄ)

$$P_n u = P_n \left(\sum_m \sum_{k=1}^{D_m} c_{mk} e_{mk} \right) = \sum_{k=1}^{D_n} c_{nk} e_{nk}$$

(SELVÄSTI [illegible] $P_n^2 = P_n$)

- OPERAATTORIT P_n TOTEUTTAVAT $P_n P_m = \delta_{nm} P_n$

JA $\sum_n P_n = \mathrm{id}$

LASKETAAN:

$$\left(\sum_n \lambda_n P_n \right) u = \sum_n \lambda_n \sum_{k=1}^{D_n} c_{nk} e_{nk}$$

TOISAALTA

$$A u = A \left(\sum_n \sum_{k=1}^{D_n} c_{nk} e_{nk} \right) = \sum_n \sum_k c_{nk} A e_{nk} = \sum_n \lambda_n \sum_{k=1}^{D_n} c_{nk} e_{nk}$$

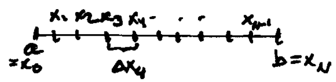
$$\Rightarrow \quad \boxed{A = \sum_n \lambda_n P_n} \qquad (S)$$

OPERAATTORIN A SPEKTRAALIESITYS

KIRJOITETAAN (S) TOISEEN MUOTOON

SIVUJUONI: STIELTJESIN INTEGRAALI

(THOMAS STIELTJES 1856-1894)



$$\int_a^b f(x)\, dg(x) \equiv \lim_{\substack{N \to \infty \\ |\Delta x_i| \to 0}} \sum_{i=1}^{N} f(\bar{x}_i) \left(g(x_i) - g(x_{i-1}) \right)$$

$$x_{i-1} \leq \bar{x}_i \leq x_i$$

ESIM.: $\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a)$

$g(x) = x$ ANTAA RIEMANNIN INTEGRAALIN

$g(x)$ DIFFERENTIOITUVA

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$$

STIELTJESIN INTEGRAALI ON HYVIN MÄÄRITELTY LAAJEMMALLE FUNKTIOJOUKOLLE

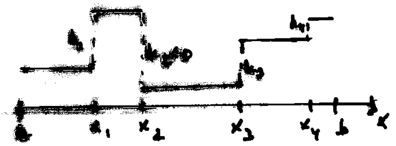
$$g(x) = \theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$a < 0,\ b > 0$

$$\int_a^b f(x)\, d\theta(x) = f(0)$$

(YHTÄPITÄVÄ KAAVAN $\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x)$ KANSSA!)

JOS $g(x)$ ON PALOITTAIN VAKIO $a \le x \le b$,
HYPPÄÄ KOHDISSA x_i h_i:N VERRAN $i = 1, \dots, p$:



$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \sum_{i=1}^{p} h_i f(x_i)$$

A:N OMINAISARVOT $\in \Sigma(A)$, KOMPAKTI
$\bar{\lambda}_0 = \inf \Sigma(A)$, $\bar{\lambda}_M = \sup \Sigma(A)$ $\quad \bar{\lambda}_0 \le \lambda_n \le \bar{\lambda}_M$

MÄÄRITELLÄÄN OPERAATTORIARVOINEN FUNKTIO $E_A(\lambda)$

$$E_A(\lambda) = 0 \quad (\text{0-OPERAATTORI!}) \qquad \lambda < \lambda_1$$
$$= \sum_{i=1}^{k} P_i \qquad \lambda_k \le \lambda < \lambda_{k+1}$$
$$= \sum_n P_n = id \qquad \lambda > \bar{\lambda}_M$$

TOTEUTTAA $E_A(\lambda) E_A(\lambda') = E_A(\lambda_{min})$ $\quad \lambda_{min} = \min(\lambda, \lambda')$

(KOSKA $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$ ESIM.
$(P_1 + P_2 + P_3)(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5) = P_1 + P_2 + P_3$)

$\Rightarrow (E_A(\lambda))^2 = E_A(\lambda)$ PROJ.-OP.

MÄÄRITELLÄÄN SEURAAVAKSI OPERAATTORIARVOINEN
STIELTJESINTEGRAALI

$$\int_{\bar{\lambda}_0}^{\bar{\lambda}_M} f(\lambda)\, dE_A(\lambda) = \lim_{\substack{N \to \infty \\ |\Delta \bar{\lambda}_i| \to 0}} \sum_{i=1}^{N} f(\bar{\bar{\lambda}}_i)\left(E_A(\bar{\lambda}_i) - E_A(\bar{\lambda}_{i-1})\right)$$
$$\bar{\lambda}_{i-1} \le \bar{\bar{\lambda}}_i \le \bar{\lambda}_i$$

ILMEISESTI

$$\int_{\bar{\lambda}_0}^{\lambda} dE_A(\bar{\lambda}) = E_A(\lambda)$$

JA $$\int_{\bar{\lambda}_0}^{\bar{\lambda}_M} \bar{\lambda}\, dE_A(\bar{\lambda}) = \sum_n \lambda_n P_n = A$$

TÄMÄ ESITYS YLEISTYY : RAJOITETUN, HERMIITTISEN
A SPEKTRAALIESITYS

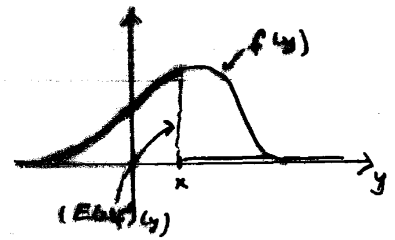
$$A = \int_{\inf \Sigma(A)}^{\sup \Sigma(A)} \lambda\, dE_A(\lambda)$$

MISSÄ $E_A(\lambda)$ ON OPERAATTORIARVOINEN FUNKTIO
JOKA TOTEUTTAA

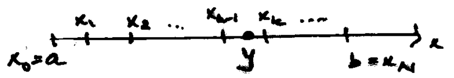
$$E_A(\lambda) E_A(\lambda') = E_A(\lambda_{min}) \qquad \lambda_{min} = \min(\lambda, \lambda')$$
$$\lim_{\lambda \to -\infty} E_A(\lambda) = 0$$
$$\lim_{\lambda \to +\infty} E_A(\lambda) = id$$
$$\int_{\inf \Sigma(A)}^{\sup \Sigma(A)} dE_A(\lambda) = id$$

ESIMERKKI OPERAATTORI X $L^2([a,b])$:ssä

Määritellään $(E(x)f)(y) = f(y)$ $y \leq x$
$= 0$ $y > x$



JAETAAN VÄLI $[a,b]$ N:ÄÄN OSAVÄLIIN, y ANNETTU



$x_{i-1} \leq \bar{x}_i \leq x_i$

$x_{k-1} < y < x_k$

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \bar{x}_i \left(E(x_i) - E(x_{i-1})\right) f\right)(y) = 0 + 0 + \cdots$$
$$+ \bar{x}_k \left(f(y) - 0\right) + \bar{x}_{k+1}\left(f(y) - f(y)\right) + \cdots$$
$$\cdots + \bar{x}_N \left(f(y) - f(y)\right) = \bar{x}_k f(y) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{N \to \infty} y f(y)$$
$$= (Xf)(y)$$

$$\Rightarrow \quad X = \int_a^b x \, dE(x)$$

RAJOITTAMATTOMAT OPERAATTORIT

A RAJOITTAMATON JOS JOKAISELLE $M > 0$ LÖYTYY $u \in \mathcal{H}$ S.E. $\|Au\| \geq M\|u\|$

KIINNOSTAVAT RAJOITTAMATTOMAT A ENÄT MÄÄRITELTYJÄ KOKO $\mathcal{H}$:LLA VAAN <u>MÄÄRITTELYJOUKOSSA</u> (DOMAIN) $D_A \subset \mathcal{H}$.

OPERAATTORIN TÄYDELLINEN SPESIFIKAATIO SISÄLTÄÄ D_A:N, MERK. (A, D_A)

$$(A, D_A) \neq (A, D_A') \quad \text{JOS} \quad D_A \neq D_A' \;!$$

VASTAAVASTI $R_A = A(D_A) = \{u \in \mathcal{H} \mid u = Av, v \in D_A\}$ ON A:N <u>MAALIJOUKKO</u> (RANGE)

D_A ON $\mathcal{H}$:N <u>TIHEÄ</u> (DENSE) ALIJOUKKO JOS JOKAISELLE $u \in \mathcal{H}$ JA JOKAISELLE $\varepsilon > 0$ LÖYTYY $v \in D_A$ S.E. $\|u - v\| < \varepsilon$. A ON TÄLLÖIN <u>TIHEÄSTI MÄÄRITELTY</u>

A ON OPERAATTORIN B <u>LAAJENNUS</u> (EXTENSION), MERK. $B \subseteq A$ JOS $D_B \subseteq D_A$ JA $Au = Bu$ KUN $u \in D_B$ (KIRJ. $A|_{D_B} = B$).

$(A, D_A) = (B, D_B)$ TARKOITTAA <u>SEKÄ</u> $D_A = D_B$ <u>ETTÄ</u> $Au = Bu$ $\forall u \in D_A$

HUOM. $D_{A+B} = D_A \cap D_B$

$D_{AB} = B^{-1}(R_B \cap D_A)$

(TÄSSÄ $B^{-1}(V) = \{u \mid Bu \in V\} \subset D_B$) V:N "ALKUKUVA"

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}$:N OPERAATTORIT EIVÄT YLEENSÄ MUODOSTA VEKTORIAVARUUTTA TAI ALGEBRAA

ESIMERKKEJÄ

1) $\mathcal{H} = \ell^2$ $\quad x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in \mathcal{H}$

$A\underset{\sim}{x} = (x_1, \tfrac{1}{2}x_2, \tfrac{1}{3}x_3, \dots)$ $\quad (A\underset{\sim}{x})_n = \frac{x_n}{n}$

A RAJOITETTU, $A^+ = A$ (HERMIITTINEN)

VOIDAAN OTTAA $D_A = \ell^2 = \mathcal{H}$. TÄRK. SIIS $(A, \mathcal{H})$

$\left(\sum |x_n|^2 < \infty \Rightarrow \sum_1 \frac{1}{n^2}|x_n|^2 < \infty \right)$

$$R_A = \{ \underset{\sim}{y} \in \ell^2 \mid \sum_1^\infty n^2 |y_n|^2 < \infty \} \subset \mathcal{H}$$

R_A ON TIHEÄ ℓ^2:SSA : $\underset{\sim}{x} \in \ell^2$, $\varepsilon > 0$ ANNETTU

$\Rightarrow$ LÖYTYY AINA N S.E. $\sum_{i=N+1}^\infty |x_i|^2 < \varepsilon^2$. VALITAAN

$y_n = x_n \quad n = 1, \dots, N$

$ = 0 \quad n = N+1, \dots$ $\quad \Rightarrow y \in R_A$ JA $\|x - y\|^2 < \varepsilon^2$

A:LLA ON KÄÄNTEISOPERAATTORI, JONKA MÄÄRITTELYJOUKKO ON $D_{A^{-1}} = R_A$ $\quad (A^{-1}\underset{\sim}{x})_n = n x_n \quad n = 1, 2, \dots$

A^{-1} RAJOITTAMATON $\quad (\underset{\sim}{e}_n)_k = \delta_{nk}$ (ℓ^2:N ON. KANTA)

$\|A^{-1}\underset{\sim}{e}_n\| = \|n \underset{\sim}{e}_n\| = n \to \infty \quad n \to \infty$

2) $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ $\quad (Xf)(x) = x f(x)$

X RAJOITTAMATON : OLKOON $f_n(x) = 1 \quad n \le x \le n+1$

$ = 0$ MUUALLA

$\|f_n\|^2 = 1 \quad \|X f_n\|^2 \ge n^2 \to \infty \quad n \to \infty$

$ = (n^2 + n + \tfrac{1}{3})$

LAAJIN MAHDOLLINEN MÄÄRITTELYJOUKKO ON

$$D_X = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \int_{-\infty}^\infty dx \, |x f(x)|^2 < \infty \} \subset L^2(\mathbb{R})$$

(ESIM. $f(x) = \frac{1}{1+|x|} \in L^2(\mathbb{R})$ MUTTA $\notin D_X$)

D_X ON TIHEÄ $L^2(\mathbb{R})$:SSÄ :

$g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ MIELIV.

MÄÄR. $g_n(x) = \begin{cases} g(x) & -n \le x \le n \\ 0 & |x| > n \end{cases}$ $\quad g_n \in D_X$

JA $g_n \to g \quad n \to \infty$

ON MUITAKIN $L^2(\mathbb{R})$:SSÄ TIHEITÄ MÄÄRITTELYJOUKKOJA:

ESIM TESTIFUNKTIOAVARUUDET

$D(\mathbb{R}) = \{ f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \exists M > 0 \text{ S.E. } f(x) = 0 \ |x| > M \}$

"FINIITTISET FUNKTIOT"

$S(\mathbb{R}) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid |x|^p f(x) \to 0 \ |x| \to \infty \text{ KAIKILLE } p > 0 \}$

"NOPEASTI VÄHENEVÄT FUNKTIOT"

ILMEISESTI $(X, D) \subseteq (X, S) \subseteq (X, D_X)$

KAIKKI NÄMÄ OPERAATTORIT RAJOITTAMATTOMIA

3) $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ $\quad P = -i\frac{d}{dx}$

$$(Pf)(x) = -i\frac{df}{dx}$$

LAAJIN MÄÄRITTELYJOUKKO

$$D_P = \left\{ f \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ DIFFERENTIOITUVA MELKEIN KAIKKIALLA} \\ \text{ja } |f'| \in L^2(\mathbb{R}) \end{array} \right\} \subset L^2(\mathbb{R})$$

ESIM $\quad f(x) = |x|^{1/4} e^{-x^2} \in L^2(\mathbb{R})$

$$\notin D_P \quad \left(|f'| \sim \frac{1}{|x|^{3/4}} \quad x \to 0 \right)$$

(SE ETTÄ $f'(0)$ EI OLE OLEMASSA ON OK.)

VOIMME MYÖS OTTAA MÄÄRITTELYJOUKOKSI D TAI S

$$(P, D) \subseteq (P, S) \subseteq (P, D_P)$$

APULAUSE OLKOON V TIHEÄ $\mathcal{H}$:SSA. JOS $\langle u | v \rangle = 0$ KAIKILLE $v \in V$, NIIN $u = \vec{0}$.

TODISTUS $w \in \mathcal{H}$, $\varepsilon > 0$. V TIHEÄ $\Rightarrow \exists v \in V$ S.E. $\|w - v\| < \varepsilon$

$$|\langle u | w \rangle| = |\langle u | w - v \rangle| \leq \|u\| \, \|w - v\| < \varepsilon \|u\|$$

$\varepsilon > 0$ MIELIV. $\Rightarrow \langle u | w \rangle = 0 \;\; \forall w \in \mathcal{H} \Rightarrow u = \vec{0}$ $\quad \square$.

ADJUNGOITU OPERAATTORI

(A, D_A) OLKOON TIHEÄSTI MÄÄRITELTY OPERAATTORI $\mathcal{H}$:SSA

MÄÄRITTELEMME JOUKON D_{A^+} SEURAAVASTI:

$$u \in D_{A^+} \Leftrightarrow \exists u^+ \text{ S.E. } \langle u | A v \rangle = \langle u^+ | v \rangle \quad \forall v \in D_A$$

u^+ (JOS ON OLEMASSA) ON YKSIKÄSITTEINEN:

JOS $\langle u_1^+ | v \rangle = \langle u_2^+ | v \rangle \quad \forall v \in D_A$

$\Rightarrow \langle u_1^+ - u_2^+ | v \rangle = 0 \quad \forall v \in D_A \Rightarrow u_1^+ - u_2^+ = \vec{0}$

APULAUSEEN NOJALLA

VEKTOREILLE $u \in D_{A^+}$ MÄÄRITTELEMME

$$A^+ u = u^+$$

(A^+, D_{A^+}) ON (A, D_A):N ADJUNGOITU OPERAATTORI

HUOM. 1) JOS A RAJOITETTU JA $D_A = \mathcal{H}$ MÄÄRITELMÄ YHTYY AIKAISEMPAAN

2) (A^+, D_{A^+}) VOIDAAN MÄÄRITELLÄ VAIN JOS D_A TIHEÄ

3) (A^+, D_{A^+}) RIIPPUU (MYÖS) D_A:STA !

OPERAATTORI (A, D_A) ON SULJETTU (CLOSED) JOS JOKAISELLE JONOLLE $u_n \in D_A$ S.E. $u_n \to u$ JA $Au_n \to v$ PÄTEE ETTÄ $u \in D_A$ JA $Au = v$

JOKAINEN JATKUVA OPERAATTORI ON SULJETTU, MUTTA SULJETTU OPERAATTORI EI VÄLTTÄMÄTTÄ OLE JATKUVA

LAUSE : JOS (A, D_A) TIHEÄSTI MÄÄRITELTY, NIIN (A^+, D_{A^+}) SULJETTU

TOD. OLKOON $y_n \in D_{A^+}$ JONO S.E. $y_n \to y$ JA $A^+ y_n \to z$. TÄLLÖIN KAIKILLE $x \in D_A$

$$\langle y | Ax \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle y_n | Ax \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle A^+ y_n | x \rangle = \langle z | x \rangle$$

SIIS $y \in D_{A^+}$ JA $A^+ y = z$ □.

ESIMERKKI

1) $\mathcal{H} = \ell^2$ $\quad \underset{\sim}{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ ← HUOM. ALOITETAAN NYT $n=0$ ISTA

O.N. KANTA $\{\underset{\sim}{e}_n\}$ $\quad (\underset{\sim}{e}_n)_k = \delta_{nk}$ $\quad n = 0, 1, 2, \dots$

MÄÄR. OPERAATTORI a : $a \underset{\sim}{e}_n = \sqrt{n}\, e_{n-1}$ $\quad n \geq 1$

$a \underset{\sim}{e}_0 = \vec{0}$

ELI $\underset{\sim}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \underset{\sim}{e}_n$

$$a\underset{\sim}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}\, x_{n+1} \underset{\sim}{e}_n \qquad (a\underset{\sim}{x})_n = \sqrt{n+1}\, x_{n+1}$$

$$= (x_1, \sqrt{2}x_2, \sqrt{3}x_3, \dots)$$

VOIMME OTTAA $D_a = \{\underset{\sim}{x} \mid \sum_{n=1}^{\infty} n|x_n|^2 < \infty\}$

D_a TIHEÄ ℓ^2:SSA (TODISTUS KUTEN ESIMERKISSÄ 1)

$R_a = \ell^2$, KOSKA JOS $\underset{\sim}{y} \in \ell^2$ MIELIV., NIIN $\underset{\sim}{y} = a\underset{\sim}{x}$

MISSÄ $x_n = \frac{y_{n-1}}{\sqrt{n}}$ $\quad n \geq 1$, x_0 MIELIV.

TARK. SIIS (a, D_a)

MIKÄ ON (a^+, D_{a^+}) ?

ETSITÄÄN y^+ S.E. $\langle \underset{\sim}{y}^+ | \underset{\sim}{x} \rangle = \langle \underset{\sim}{y} | a\underset{\sim}{x} \rangle$

$$\langle \underset{\sim}{y}^+ | \underset{\sim}{x} \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (y_m^+)^* x_m$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} y_n^* (a\underset{\sim}{x})_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}\, y_n^* x_{n+1} \qquad \forall \underset{\sim}{x} \in D_a$$

* KANDIDAATTI $\quad y_0^+ = 0 \quad y_n^+ = \sqrt{n}\, y_{n-1} \quad n \geq 1$

$$\|y^+\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|y_n|^2$$

JOS $\|y^+\| < \infty$ $\quad |\langle \underset{\sim}{y}^+ | \underset{\sim}{x} \rangle| \leq \|y^+\|\|x\| < \infty$

$$\Rightarrow D_{a^+} = \{\underset{\sim}{y} \in \ell^2 \mid \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|y_n|^2 < \infty\} \overset{\text{OSOITA!}}{=}$$

$$= \{\underset{\sim}{y} \in \ell^2 \mid \sum_{n=0}^{\infty} n|y_n|^2 < \infty\} = D_a$$

JA $(a^+\underset{\sim}{y})_n = y_n^+ = \sqrt{n}\, y_{n-1}$ $\quad \Leftrightarrow \quad a^+ \underset{\sim}{e}_n = \sqrt{n+1}\, \underset{\sim}{e}_{n+1}$

$$a^+\underset{\sim}{y} = (0, y_0, \sqrt{2}y_1, \sqrt{3}y_2, \dots)$$

SEKÄ a ETTÄ a^+ SULJETTUJA

MUTTA $R_{a^+} = \{\underset{\sim}{y} \mid y_0 = 0\} \subset \mathcal{H}$

$\neq R_a$

TARKASTELLAAN VIELÄ TULOJA a^+a, aa^+

$$a^+a\underset{\sim}{x} = a^+(x_1, \sqrt{2}x_2, \sqrt{3}x_3, \dots) = (0, x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)$$

$$aa^+\underset{\sim}{x} = a(0, x_0, \sqrt{2}x_1, \sqrt{3}x_2, \dots) = (x_0, 2x_1, 3x_2, 4x_3, \dots)$$

$$D_{a^+a} = \{\underset{\sim}{x} \mid \sum n^2|x_n|^2 < \infty\} \quad \text{(SUURIMMILLAAN)}$$

$$D_{aa^+} = \{\underset{\sim}{x} \mid \sum (n+1)^2|x_n|^2 < \infty\} = D_{a^+a}$$

HARM. OSKILLAATTORIN TIKAPUUOPERAATTORIT !

$$[a, a^+]\underset{\sim}{x} \equiv (aa^+ - a^+a)\underset{\sim}{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots) = \underset{\sim}{x}$$

$$- [a, a^+] = (\mathbb{1}, D_a) \neq (\mathbb{1}, \ell^2)$$

HELPOSTI NÄHDÄÄN ETTÄ JOS (A, D_A) JA (B, D_B) TIHEÄSTI MÄÄRITELTYJÄ JA $A \subseteq B$, NIIN $B^+ \subseteq A^+$:

OTETAAN $u \in D_A$ JA $v \in D_{B^+}$

$\langle v | Au \rangle \underset{B|_{D_A} = A}{=} \langle v | Bu \rangle = \langle B^+ v | u \rangle$

$\Rightarrow v \in D_{A^+}$ JA $A^+ v = B^+ v$ KUN $v \in D_{B^+}$

$\Rightarrow D_{B^+} \subseteq D_{A^+}$ JA $B^+ \subseteq A^+$

MÄÄRITELMÄ OLKOON D_A TIHEÄ $\mathcal{H}$:SSA

- A ON ITSEADJUNGOITU (SELF-ADJOINT), JOS $(A, D_A) = (A^+, D_{A^+})$ (HUOM. SIIS $D_A = D_{A^+}$!)

- A ON SYMMETRINEN (SYMMETRIC) JOS $A \subseteq A^+$

MUISTETAAN ETTÄ A ON HERMIITTINEN JOS A RAJOITETTU, $A^+ = A$ JA $D_A = D_{A^+} = \mathcal{H}$

SIIS $\{$HERMIITTISET OPER.$\} \subseteq \{$ITSEADJ. OP.$\} \subseteq \{$SYMMETRISET OP.$\}$

TOINEN TAPA KARAKTERISOIDA SYMMETRISET OPERAATTORIT

LAUSE A SYMMETRINEN $\Leftrightarrow \langle u | Av \rangle = \langle Au | v \rangle \ \forall u, v \in D_A$

TOD. i) $\Rightarrow$ $u \in D_A$, $v \in D_A$

$\langle u | Av \rangle \underset{D_A \subseteq D_{A^+}}{=} \langle A^+ u | v \rangle \underset{A^+|_{D_A} = A}{=} \langle Au | v \rangle$

$\Leftarrow$ $\underset{\langle A^+ u | v \rangle}{\langle u | Av \rangle} = \langle Au | v \rangle \ \forall v \in D_A$ (TIHEÄ) $\Rightarrow Au = A^+ u$

$\Rightarrow u \in D_{A^+}$ $\Rightarrow A \subseteq A^+$ $\square$

ESIMERKKI 5 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$

TARK. OP. $(X, D(\mathbb{R}))$

$\varphi, \psi \in D(\mathbb{R})$

$\langle \varphi | X \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi^*(x)\, x \psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, (x\varphi(x))^* \psi(x) = \langle X\varphi | \psi \rangle$

$\Rightarrow (X, D)$ SYMMETRINEN,

MUTTEI ITSEADJUNGOITU : LÖYTYY FUNKTIOITA $f \notin D$ JOILLE ON OLEMASSA f^+ S.E. $\langle f | X \psi \rangle = \langle f^+ | \psi \rangle$ $\forall \psi \in D$, ESIM.

a) $f(x) = 1 \quad -1 \le x \le 1$; $\ = 0 \quad |x| > 1$ $\quad \left(f^+(x) = \begin{cases} x & -1 \le x \le 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \right)$

b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\Rightarrow D_{X^+} \supsetneq D$

(SAMAT ESIMERKIT OSOITTAVAT ETTEI (X, S) MYÖSKÄÄN OLE ITSEADJUNGOITU)

MUTTA MITEN ON (X, D_X) ?

(ELI: $D_X = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |xf(x)|^2 < \infty \}$)

OSOITIMME YLLÄ ETTÄ D_X ON TIHEÄ $L^2(\mathbb{R})$:SSÄ

KUTEN YLLÄ (X, D_X) ON SYMMETRINEN

$\Rightarrow D_{X^+} \supseteq D_X$.

JOS VOIMME LISÄKSI OSOITTAA, ETTÄ $D_{X^+} \subseteq D_X$, NIIN $D_{X^+} = D_X$ JA (X, D_X) ITSEADJ.

$D_{X^+} = \{$ FUNKTIOT $g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ S.E. $\exists g^+(x)$ S.E. $\langle g | Xf \rangle = \langle g^+ | f \rangle \ \forall f \in D_X \}$

OLKOON $g \in D_{x^+}$

$\langle g | x f \rangle = \langle g^+ | f \rangle$ TARKOITTAA APULAUSEEN NOJALLA

$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(x g^*(x) - g^+(x)^* \right) f(x) = 0 \quad \forall f \in D_x$

$\Rightarrow g^+(x)^* = x g^*(x)$ MELKEIN KAIKKIALLA,

S.O. $g^+(x) = x g(x)$ M.K.

$g^+ \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \, | x g(x) |^2 < \infty$

$\Rightarrow g \in D_x$

JOKAINEN $g \in D_{x^+}$ KUULUU SIIS MYÖS JOUKKOON

D_x ELI $D_{x^+} \in D_x$

$\Rightarrow (X, D_x)$ ITSEADJUNGOITU.

KÄÄNTEISOPERAATTORIN YLEISTYS

OLKOON
(A, D_A) $\quad A : D_A \to R_A$

MÄÄRITELLÄÄN OPERAATTORIN A YDIN (KERNEL)

$$\ker A = \{ u \in D_A \mid Au = \vec{0} \}$$

$\vec{0} \in \ker A$ AINA.
JOS TÄMÄ ON AINOA MAHDOLLISUUS, ELI JOS
$\ker A = \{\vec{0}\}$ VOIMME MÄÄRITELLÄ OPERAATTORIN
(A^{-1}, R_A) ASETTAMALLA

$$A^{-1} u = v \iff Av = u$$

ELI $A^{-1} : R_A \to D_A$

TÄMÄ ON HYVIN MÄÄRITELTY:

$Av_1 = Av_2 = u \Rightarrow A(v_1 - v_2) = \vec{0}$

$\Rightarrow v_1 - v_2 \in \ker A = \{\vec{0}\} \Rightarrow v_1 = v_2$

ITSEADJUNGOIDUN OPERAATTORIN SPEKTRISTÄ

(A, D_A) ITSEADJUNGOITU $\Rightarrow$ OMINAISARVOT (JOS ON) REAALISIA, ERISUURIA OMINAISARVOJA VASTAAVAT OMINAISVEKTORIT ORTOGONAALISIA (TOD. KUTEN HERMIITTISILLE OPERAATTOREILLE)

$\lambda \in \mathbb{C}$

MÄÄR. RESOLVENTTIJOUKKO

$$\Delta_\lambda = R_{A-\lambda id}$$

JOS λ EI OLE OMINAISARVO $\left((A-\lambda id)^{-1}, R_{A-\lambda id}\right)$ ON OLEMASSA ($u \in \ker(A-\lambda id) \Rightarrow Au = \lambda u$; MUTTA λ EI OMINAISARVO $\Rightarrow u = \vec{0}$ ELI $\ker(A-\lambda id) = \{\vec{0}\}$)

JA $D_{(A-\lambda id)^{-1}} = R_{A-\lambda id} = \Delta_\lambda$

$\lambda \in \mathbb{C}$ ON SÄÄNNÖLLINEN ARVO JOS $\Delta_\lambda = \mathcal{H}$

$\mathbb{C} - \{\text{SÄÄNNÖLLISET ARVOT}\} = \Sigma(A) =$ A:N SPEKTRI

LAUSE λ ON ITSEADJUNGOIDUN OPERAATTORIN (A, D_A) OMINAISARVO SILLOIN JA VAIN SILLOIN KUN Δ_λ EI OLE TIHEÄ $\mathcal{H}$:SSA

TOD. 1) JOS $Au = \lambda u$, $u \neq \vec{0}$, $u \in D_A$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow 0 = \langle (A-\lambda id)u | v \rangle = \langle u | \underbrace{(A-\lambda id)v}_{w \in R_{(A-\lambda id)} = \Delta_\lambda} \rangle \quad \forall v \in D_A$$

SIIS $\langle u | w \rangle = 0 \quad \forall w \in \Delta_\lambda$

JOS Δ_λ OLISI TIHEÄ TÄSTÄ SEURAISI $u = \vec{0}$, RISTIRIITA

SIIS Δ_λ EI TIHEÄ

2) OL. Δ_λ EI TIHEÄ. $\overline{\Delta_\lambda}$ (SULKEUMA) ON $\mathcal{H}$:N ALIAVARUUS JA $(\overline{\Delta_\lambda})^\perp \neq \{\vec{0}\}$ (MUUTEN Δ_λ TIHEÄ).

ON SIIS OLEMASSA $u \neq \vec{0}$ S.E.

$$\langle u | (A-\lambda id)v \rangle = 0 \quad \forall v \in D_A$$

A ITSEADJ. $\rightarrow$ $\quad \| \quad$

$$\langle (A-\lambda id)u | v \rangle$$

D_A TIHEÄ $\Rightarrow$ $(A-\lambda id)u = \vec{0}$ ELI $Au = \lambda u$ $\square$

SPEKTRAALIESITYSLAUSE OLKOON (A, D_A) ITSEADJUNGOITU. ON OLEMASSA OPERAATTORIARVOINEN FUNKTIO $E_A(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ S.E.

$E_A(-\infty) = 0$, $E_A(+\infty) = id$, $E_A(\lambda)E_A(\lambda') = E_A(\lambda_{min})$

JA

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_A(\lambda),$$

$$\langle u | Av \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\langle u | E_A(\lambda) v \rangle \quad \forall u, v \in D_A$$

TODISTUS VAIKEA (SIVUUTETAAN TÄSSÄ)

SPEKTRAALIESITYS MAHDOLLISTAA OPERAATTORIFUNKTIOIDEN MÄÄRITELMÄN:

$$f(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \, dE_A(\lambda)$$