YHTEYS KVANTTIMEKANIIKKAAN

1. PAIKKAOPERAATTORI $(\hat{X}, D_{\hat{X}})$

$$(\hat{X}\psi)(x) = x\,\psi(x) \qquad \psi \in L^2(\mathbb{R})$$

$$D_{\hat{X}} = \left\{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |x\varphi(x)|^2 < \infty \right\}$$

$(\hat{X}, D_{\hat{X}})$ ITSEADJUNGOITU

SPEKTRAALIESITYS:

MÄÄR. OPERAATTORIT $\hat{E}_x \qquad -\infty \le x \le \infty$

$$(\hat{E}_x\psi)(y) = \begin{cases} \psi(y) & y \le x \\ 0 & y > x \end{cases} \qquad -\infty < x < \infty$$

ELI $$(\hat{E}_x\psi)(y) = \int_{-\infty}^{x} dz\, \delta(y-z)\psi(z) \qquad (1)$$

HUOM. $\hat{E}_x$ ON PROJEKTIO-OPERAATTORI ALIAVARUUDELLE

$$V_x = \{ \psi \in L^2 \mid \psi(y) = 0 \quad x < y \}$$

LISÄKSI $\underset{\text{NOLLAOP.}}{\hat{E}_{-\infty} \equiv \hat{0}} \qquad \hat{E}_{+\infty} \equiv id$

$\{\hat{E}_x\}$ TOTEUTTAVAT SPEKTRAALIESITYS-LAUSEESSA VAADITUT EHDOT:

OLKOON $x' \le x$

$$(\hat{E}_x \hat{E}_{x'}\psi)(y) = \hat{E}_x \begin{cases} \psi(y) & y \le x' \\ 0 & y > x' \end{cases} = \begin{cases} \psi(y) & y \le x' \\ 0 & y > x' \end{cases}$$

$$(\hat{E}_{x'} \hat{E}_x\psi)(y) = \hat{E}_{x'} \begin{cases} \psi(y) & y \le x \\ 0 & y > x \end{cases} = \begin{cases} \psi(y) & y \le x' \\ 0 & y > x' \end{cases}$$

SIIS $\hat{E}_x \hat{E}_{x'} = \hat{E}_{x'} \hat{E}_x = E_{x''}$

MISSÄ $x'' = \mathrm{MIN}(x, x')$

VÄITÄMME NYT: $$\hat{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, d\hat{E}_x$$

TARKOITTAEN

$$\langle \varphi | \hat{X}\psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\, d\langle \varphi | \hat{E}_x \psi \rangle$$

STIELTJES INT.

KAIKILLE $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$

TOSIAAN:

$$\langle \varphi | \hat{E}_x \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \varphi^*(y) (\hat{E}_x \psi)(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{x} dy\, \varphi^*(y)\, \psi(y) \quad \equiv f(x)$$

f DIFFERENTIOITUVA

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \varphi^*(x)\, \psi(x)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x\, d\langle \varphi | \hat{E}_x \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\, df(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f'(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(x)\, x\, \psi(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi^*(x) (\hat{x} \psi)(x) = \langle \varphi | \hat{x} \psi \rangle$$

OK!

SPEKTRAALIESITYKSEN AVULLA VOIDAAN MÄÄR. OPER. $\left(F(\hat{x}), D_{F(\hat{x})} \right)$

F ↑ FUNKTIO

$$F(\hat{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, d\hat{E}_x$$

$$D_{F(\hat{x})} = \left\{ \psi \in L^2 \,\middle|\, \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |F(x) \psi(x)|^2 < \infty \right\}$$

LAAJIMMILLAAN

8. DIRACIN MERKINTÄTAPA

VEKTORI $\mathcal{H}$:SSA $|u\rangle$ "KET"

$\mathcal{H}^*$:SSA $\langle v|$ "BRA"

↑ $\mathcal{H}$:N DUAALIAVARUUS

$$v(u) = \langle v | u \rangle \quad \left(\text{RIESZIN ESITYSLAUSE} \right)$$

↑ SKALAARITULO

OLKOON $\mathcal{H}$ SEPAROITUVA JA

$\{ |e_i\rangle \}$ O.N. KANTA : $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$

$|u\rangle$:N ESITYS KANNASSA $\{ |e_i\rangle \}$:

$$|u\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |e_i\rangle \langle e_i | u \rangle = id_{\mathcal{H}} |u\rangle$$

$$\Rightarrow id_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{\infty} |e_i\rangle \langle e_i|$$

"TÄYDELLISYYSRELAATIO"

$\hat{A}$ OPERAATTORI

$$\hat{A} |e_i\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} |e_j\rangle a_{ji}$$

$$a_{ji} = \langle e_j | \hat{A} e_i \rangle \equiv \langle e_j | \hat{A} | e_i \rangle$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \sum_{i,j=1}^{\infty} |e_j\rangle a_{ji} \langle e_i|$$

OPERAATTORIN MATRIISIESITYS

LAAJENNETAAN $\mathcal{H}$ SISÄLTÄMÄÄN "VEKTOREITA" $|x\rangle$, $-\infty < x < \infty$ JOTKA TOTEUTTAVAT

$$\langle x|y\rangle = \delta(x-y)$$

$\psi \in L^2(\mathbb{R})$, MERKITÄÄN

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$$

TÄLLÖIN VOIMME KIRJOITTAA

$$\hat{E}_x = \int_{-\infty}^{x} dz\, |z\rangle\langle z|$$

KOSKA

$$(\hat{E}_x\psi)(y) = \langle y|\hat{E}_x\psi\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} dz\, \underbrace{\langle y|z\rangle}_{\delta(y-z)} \underbrace{\langle z|\psi\rangle}_{\psi(z)} = \int_{-\infty}^{x} dz\, \delta(y-z)\psi(z)$$

(VRT. (1))

HUOM. $\hat{E}_\infty = id = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |x\rangle\langle x|$

"TÄYDELLISYYSRELAATIO"

NYT $d\hat{E}_x = |x\rangle\langle x|$

JA SPEKTRAALIESITYS

$$\hat{X} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x\, |x\rangle\langle x| \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |x\rangle x \langle x|$$

TARKISTUS

$$(\hat{X}\psi)(y) = \langle y|\hat{X}|\psi\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \underbrace{\langle y|x\rangle}_{\delta(y-x)}\, x\, \underbrace{\langle x|\psi\rangle}_{\psi(x)} = y\,\psi(y)$$

OK!

3. IMPULSSIOPERAATTORI $(\hat{P}, D_{\hat{P}})$

$$(\hat{P}\psi)(x) = -i\frac{d\psi}{dx} \qquad (\hbar = 1)$$

$$D_{\hat{P}} = \left\{\psi \in L^2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi'(x)|^2 < \infty \right\}$$

$(\hat{P}, D_{\hat{P}})$ ITSEADJUNGOITU

SPEKTRAALIESITYS RAKENNETAAN YKSINKERTAISIMMIN FOURIER'N MUUNNOKSEN AVULLA:

MÄÄR. OPERAATTORI $\hat{\mathcal{F}} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$

$$(\hat{\mathcal{F}}\psi)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \psi(x) \equiv \tilde{\psi}(k)$$

($\hat{\mathcal{F}}\psi$ ON TODELLA $L^2(\mathbb{R})$:N ALKIO, JOS ψ ON. TODISTUS LÖYTYY MATEMATIIKAN KIRJOISTA)

PLANCHERELIN KAAVA (HONKONEN: FYMM I, KAAVA (6.16)) SANOO

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi^*(x)\, \psi(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{\varphi}^*(k)\, \tilde{\psi}(k) = \langle \hat{\mathcal{F}}\varphi | \hat{\mathcal{F}}\psi \rangle$$

$\hat{\mathcal{F}}$ ON SIIS ISOMETRINEN

LISÄKSI $\hat{\mathcal{F}}^{-1}$ ON OLEMASSA:

$$(\hat{\mathcal{F}}^{-1}\tilde{\psi})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx}\, \tilde{\psi}(k) = \psi(x)$$

(HONKONEN)

$\hat{\mathcal{F}}$ ON SIIS UNITAARINEN:

$$\hat{\mathcal{F}}\hat{\mathcal{F}}^\dagger = \hat{\mathcal{F}}^\dagger\hat{\mathcal{F}} = id, \quad \hat{\mathcal{F}}^{-1} = \hat{\mathcal{F}}^\dagger$$

HONKONEN, LAUSE 6.4:

$$\hat{\mathcal{F}}\left(-i\frac{d\psi}{dx}\right)(k) = k\,\tilde{\psi}(k)$$

ELI $\quad \hat{\mathcal{F}}(\hat{P}\psi)(k) = k\,\tilde{\psi}(k)$

$$= (\hat{X}\tilde{\psi})(k) = \hat{X}\hat{\mathcal{F}}\psi\,(k)$$

KERTOMALLA $\hat{\mathcal{F}}^{-1}$:LLÄ VASEMMALTA

$$\Rightarrow (\hat{P}\psi)(x) = (\hat{\mathcal{F}}^{-1}\hat{X}\hat{\mathcal{F}})\psi\,(x)$$

KAIKILLE $\psi \in L^2$, ELI

$$\boxed{\hat{P} = \hat{\mathcal{F}}^{-1}\hat{X}\hat{\mathcal{F}}}$$

$\hat{X}$:N SPEKTRAALIESITYKSESTÄ SAADAAN $\hat{P}$:N SPEKTRAALIESITYS

$$\hat{P} = \int_{-\infty}^{\infty} k\, d(\hat{\mathcal{F}}^{-1}\hat{E}_k\,\hat{\mathcal{F}})$$

(INTEGROIMISMUUTTUJAN NIMEÄ VAIHDETTU $x \to k$)

$$\tilde{\psi}(k) = \langle k|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \langle k|x\rangle \psi(x)$$

$$\overset{\text{OK!}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\, \psi(x)$$

KONSISTENSSI VAATII SIIS

$$\langle k|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}$$

JA

$$\varphi_k(x) \equiv \langle x|k\rangle = \langle k|x\rangle^*$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

"IMPULSSIOPERAATTORIN OMINAIS-FUNKTIO" $\left(\notin L^2(\mathbb{R}) \; ! \right)$

TARKISTUS:

$$\langle \varphi|\hat{P}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} k \; d\langle \varphi|\hat{\mathcal{F}}^{-1}\hat{E}_k\hat{\mathcal{F}}|\psi\rangle$$

$$\hat{\mathcal{F}}^{+} = \hat{\mathcal{F}}^{-1}$$

NYT $\langle \varphi|\hat{\mathcal{F}}^{-1}\hat{E}_k\hat{\mathcal{F}}|\psi\rangle \overset{\downarrow}{=}$

$$= \langle \hat{\mathcal{F}}\varphi|\hat{E}_k|\hat{\mathcal{F}}\psi\rangle = \int_{-\infty}^{k} dk'\, \tilde{\varphi}(k')^* \tilde{\psi}(k')$$

$$\Rightarrow \langle \varphi|\hat{P}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dk\; k\; \tilde{\varphi}^*(k)\, \tilde{\psi}(k)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk\; \tilde{\varphi}^*(k)\; k\; \tilde{\psi}(k) \overset{\checkmark \text{ PLANCHEREL}}{=}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\; \varphi(x)^* \left(-i\frac{d\psi}{dx}\right) \qquad \text{O.K. !}$$

<u>DIRACIN MERKINTÄTAVASSA</u>

OTETAAN KÄYTTÖÖN "VEKTOREITA"

$|k\rangle$ S.E. $\quad \langle k|k'\rangle = \delta(k-k')$

$$\tilde{\psi}(k) = \langle k|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} \psi(x)$$

NYT $|\psi\rangle = \mathrm{id}|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |x\rangle\langle x|\psi\rangle$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |x\rangle\, \psi(x)$$

TÄSSÄ NOTAATIOSSA

$$\langle \varphi | \hat{\mathcal{F}}^{-1} \hat{E}_k \mathcal{F} | \psi \rangle = \langle \mathcal{F}\varphi | \hat{E}_k | \mathcal{F}\psi \rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk' \, \tilde{\varphi}(k')^* \, \hat{E}_k \, \tilde{\psi}(k')$$

$$= \int_{-\infty}^{k} dk' \, \tilde{\varphi}(k')^* \, \tilde{\psi}(k') = \int_{-\infty}^{k} dk' \, \langle \varphi | k' \rangle \langle k' | \psi \rangle$$

ELI

$$\hat{\mathcal{F}}^{-1} \hat{E}_k \mathcal{F} = \int_{-\infty}^{k} dk' \, |k'\rangle\langle k'|$$

JA

$$\hat{\mathcal{F}}^{-1} \hat{E}_\infty \hat{\mathcal{F}} = \int_{-\infty}^{\infty} dk' \, |k'\rangle\langle k'|$$

$$\hat{\mathcal{F}}^{-1} \, id \, \hat{\mathcal{F}} = id$$

TÄYDELLISYYSRELAATIO :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \, |k\rangle\langle k| = id$$

TARKISTUS :

$$\langle x | x' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dk \, \langle x | k \rangle \langle k | x' \rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, e^{ik(x-x')} = \delta(x-x')$$

KUNNOSSA !

SIVU 33 UUDESTAAN

ERIKOISFUNKTIOT JA STURM-LIOUVILLE

- LEGENDRE

$$-\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_\ell}{dx}\right] = \ell(\ell+1) P_\ell(x)$$

$a=-1$, $b=1$ $\quad p(x) = 1-x^2$ $\quad$ SINGULAARINEN

$q(x) = 0$

$w(x) = 1$

$\lambda = \ell(\ell+1)$

- LEGENDREN LIITTOFUNKTIOT

$$-\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_\ell^m(x)}{dx}\right] + \frac{m^2}{1-x^2} P_\ell^m(x) = \ell(\ell+1) P_\ell^m(x)$$

$a=-1$, $b=1$ $\quad p(x) = 1-x^2$, $\quad q(x) = \frac{m^2}{1-x^2}$, $\quad w(x) = 1$

$\lambda = \ell(\ell+1)$

- BESSEL $\quad R>0$ $J_\nu(x)$:N JOKIN NOLLAKOHTA

$\xi = \frac{x}{R}$ $\quad 0 \le \xi \le 1$ $\quad a=0$, $b=1$

$$-\frac{d}{d\xi}\left[\xi \frac{dJ_\nu(\xi R)}{d\xi}\right] + \frac{\nu^2}{\xi} J_\nu(\xi R) = R^2 \xi J_\nu(\xi R)$$

$p(\xi) = \xi$, $\quad q(\xi) = \frac{\nu^2}{\xi}$, $\quad w(\xi) = \xi$, $\quad \lambda = R^2$

- LAGUERRE

$$-\frac{d}{dx}\left[x e^{-x} \frac{dL_n}{dx}\right] = n e^{-x} L_n(x) \qquad 0 \le x < \infty$$

$a=0$, $b=\infty$

$p(x) = x e^{-x}$ $\quad q(x) = 0$, $\quad w(x) = e^{-x}$, $\quad \lambda = n$