SIJOITETAAN a_n:N LAUSEKE $f(x)$:N KEHITELMÄÄN (K)

$$\Rightarrow f(x) = \int_{-1}^{1} dy\,(1-y^2)^{m/2} f(y) \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(y) P_n^m(x) \cdot (1-x^2)^{-m/2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1-y^2}{1-x^2}\right)^{m/2} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) P_n^m(y) = \delta(x-y)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=m}^{\infty} \frac{2n+1}{2}\frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) P_n^m(y) = \delta(x-y)}$$

(TÄSSÄ KÄYTIMME

$$f(x,y)\,\delta(x-y) = f(x,x)\,\delta(x-y)$$)

KAAVASSA OLETETAAN, ETTÄ $-1 \le x \le 1$ JA $-1 \le y \le 1$.

PALLOHARMONISET FUNKTIOT

PALATAAN 3-UL. YHTÄLÖN $(\nabla^2 + f(r))u = 0$ SEPAROINTIIN PALLOKOORDINAATEISSA:

YRITE $u(r,\theta,\varphi) = R(r)\,Y(\theta,\varphi)$

$\Rightarrow$ RADIAALINEN YHTÄLÖ

$$R'' + \frac{2}{r}R' - \frac{K}{r^2}R + f(r)R = 0$$

KULMAYHTÄLÖ $\qquad K$ = SEPAROIMISVAKIO

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + KY = 0$$

EDELLEEN $Y(\theta,\varphi) = P(\theta)\,Q(\varphi)$

$$\Rightarrow \frac{d^2Q}{d\varphi^2} = -m^2 Q \qquad Q_m(\varphi) = C_m e^{im\varphi}$$

1-käs. $Q_m(\varphi+2\pi) = Q_m(\varphi)$

$\Rightarrow m$ kokonaisluku

SEKÄ

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \left[K - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P = 0$$

MUUTTUJAN VAIHTO $x = \cos\theta$ ANTAA

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP}{dx}\right] + \left[K - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P = 0 \qquad (1)$$

JOS $K = \ell(\ell+1)$, MISSÄ $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ (1) ON LEGENDREN LIITTOYHTÄLÖ, JA KOKO VÄLILLÄ $-1 \le x \le 1$ ÄÄRELLINEN RATKAISU ON $P(x) = P_\ell^m(x)$

OSOITAMME NYT, ETTÄ $K \neq \ell(\ell+1)$ ANTAA VAIN KELPAAMATTOMIA RATKAISUJA: $P(1) = \infty$ JA/TAI $P(-1) = \infty$

KIRJOITETAAN (1) MUOTOON

$$\frac{d^2P}{dx^2} - \frac{2x}{(1+x)(1-x)}\frac{dP}{dx} + \left[\frac{K}{(1+x)(1-x)} - \frac{m^2}{(1+x)^2(1-x)^2}\right]P = 0$$

JOSTA NÄHDÄÄN, ETTÄ $x = 1$ JA $x = -1$ OVAT YHTÄLÖN HEIKKOJA ERIKOISPISTEITÄ.

KÄYTTÄYTYMINEN $x = 1$:SSÄ SAADAAN SARJA-YRITETTÄ

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1-x)^{n+p}$$

$\Rightarrow$ KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ

$$p(p-1) + p - \frac{m^2}{4} = p^2 - \frac{m^2}{4} = 0$$

$\Rightarrow \quad p = \pm \frac{|m|}{2}$ JATKOSSA KÄSITTELEMME TAPAUSTA $m > 0$

SAMANTAPAINEN TARKASTELU $x = -1$:SSÄ ANTAA

$$P(x) \underset{x \to -1}{\propto} (1+x)^{\pm m/2}$$

HALUTTU KÄYTTÄYTYMINEN PÄÄTEPISTEISSÄ ON $(m>0)$

$$P(x) \propto (1+x)^{m/2}(1-x)^{m/2} = (1-x^2)^{m/2}$$

TÄSTÄ MOTIVOITUNEINA KIRJOITAMME

$$P(x) = (1-x^2)^{m/2}\, v_m(x) \qquad \left(\begin{array}{c} v_m(x)\text{:N} \\ \text{MÄÄRITELMÄ!} \end{array}\right)$$

JA JOHDAMME $v_m(x)$:N TOTEUTTAMAN YHTÄLÖN

$$(1-x^2)v_m'' - 2(m+1)x\, v_m' + [K - m(m+1)]v_m = 0$$

DERIVOIDAAN $\uparrow$ $\Rightarrow$

$$(1-x^2)(v_m')'' - 2(m+2)x\,(v_m')' + [K - (m+1)(m+2)]v_m' = 0$$

v_m' TOTEUTTAA SIIS v_{m+1}:N YHTÄLÖN

$$v_{m+1} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{VAKIO}}}{C}\cdot v_m'$$

VAKIO, VOIMME OTTAA $C = 1$

TÄMÄ TARKOITTAA:

$$v_m(x) = \frac{d^m v_0(x)}{dx^m}$$

MISSÄ $v_0(x)$ TOTEUTTAA

$$(1-x^2)v_0'' - 2x\, v_0' + K v_0 = 0$$

RATKAISEMME SARJAMENETELMÄLLÄ PÄÄNN. PISTEEN $x=0$ YMPÄRILLÄ

KARAKT. YHT. $p(p-1) = 0 \qquad p = 0$ TAI $p = 1$

$$v_0^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+p}^{(p)} x^{n+p}$$

KERTOIMET a_n TOTEUTTAVAT (SEKÄ $p=0$ ETTÄ $p=1$)

$$\sum_n \left[(n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n+1)a_n + K a_n\right]x^n = 0$$

ELI $\quad a_{n+2} = \dfrac{n(n+1) - K}{(n+1)(n+2)}\, a_n$

$a_0 \neq 0 \quad a_1 = 0 \Rightarrow$ PARILL. RATKAISU $\quad p = 0$

$a_0 = 0 \quad a_1 \neq 0 \quad$ PARITON " $\quad p = 1$.

SUURILLA n

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1)-K}{(n+1)(n+2)} a_n = \frac{n - \frac{K}{n+1}}{n+2} a_n \approx \frac{n}{n+2} a_n$$

S.O. $\quad a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n}$

JA $\quad v_0(x) \sim \sum \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$

$$\Rightarrow \quad v_m = \frac{d^m v_0}{dx^m} \propto \frac{1}{(1-x)^m} \qquad x \to 1$$

JA $\quad P(x) \sim (1-x)^{m/2} v_m \propto (1-x)^{-m/2} \qquad x \to 1$

VÄÄRÄ KÄYTTÄYTYMINEN !

ELLEI $\quad K = n(n+1) \quad$ JOLLEKIN $n \in \mathbb{N}$

JOLLOIN SARJA KATKEAA JA $v_0(x)$ ON POLYNOMI ASTETTA n (LEGENDREN POLYNOMI !)

AINOASTAAN $K = n(n+1)$ ANTAA HYVÄKSYTTÄVIÄ RATKAISUJA

PALLOHARMONISET FUNKTIOT

MÄÄR. : $\quad Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\, P_\ell^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$

CONDON-SHORTLEY VAIHESOPIMUS

A-W: $\quad \equiv Y_\ell^m(\theta,\varphi)$

TOTEUTTAVAT: $\quad \nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\vec{L}^2$

HARJ.

$$* \quad \left[-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \equiv \vec{L}^2 Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

$$= \ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

$$-i\frac{\partial}{\partial\varphi} Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \equiv L_z Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = m\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

INTEGRAALI YLI AVARUUSKULMAN

$$* \quad \int d\Omega\, Y^*_{\ell_1 m_1}(\theta,\varphi)\, Y_{\ell_2 m_2}(\theta,\varphi) \equiv \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, Y^*_{\ell_1 m_1} Y_{\ell_2 m_2}$$

$$= \delta_{\ell_1 \ell_2}\, \delta_{m_1 m_2} \qquad \text{(ORTONORMITUS)}$$

TÄYDELLISYYS :

FOURIER'N SARJOJEN TEORIA $\Rightarrow$

$f(\varphi)$ JAKSOLLINEN, JAKSO 2π $\quad f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi)$

$$\Rightarrow f(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m\, e^{im\varphi}$$

$$f_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{-im\varphi} f(\varphi)$$

$$\Rightarrow f(\varphi) = \int_0^{2\pi} d\varphi'\, f(\varphi')\, \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')}$$

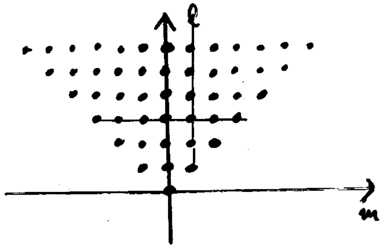
$$\Rightarrow \quad \delta(\varphi-\varphi') = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')}$$

MEILLÄ OLI MYÖS TULOS

$$\sum_{l=|m|}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)\, P_l^m(y) = \delta(x-y)$$

$$\Rightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=|m|}^{\infty} \frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos\theta)\, P_l^m(\cos\theta')\, e^{im(\varphi-\varphi')}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\varphi)\, Y_{lm}^*(\theta',\varphi')$$



$$= \delta(\cos\theta - \cos\theta')\,\delta(\varphi-\varphi')$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\,\delta(\theta-\theta')\,\delta(\varphi-\varphi') = \frac{1}{\sin\theta'}\,\delta(\theta-\theta')\,\delta(\varphi-\varphi')$$

$$\Rightarrow \psi(\theta,\varphi) = \int_0^{\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \; \delta(\theta-\theta')\,\delta(\varphi-\varphi')\,\psi(\theta',\varphi')$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta' \sin\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \; \frac{1}{\sin\theta'}\,\delta(\theta-\theta')\,\delta(\varphi-\varphi')\,\psi(\theta',\varphi')$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\varphi) \int d\Omega'\, Y_{lm}^*(\theta',\varphi')\,\psi(\theta',\varphi')$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm}\, Y_{lm}(\theta,\varphi)$$ PALLOHARMONINEN KEHITELMÄ

$$a_{lm} = \int d\Omega\, Y_{lm}^*(\theta,\varphi)\,\psi(\theta,\varphi)$$

$\delta_3(\vec r - \vec r\,')$ PALLOKOORDINAATEISSA

$$f(\vec r) = \int d^3r'\, \delta_3(\vec r - \vec r\,')\, f(\vec r\,') =$$

$$= \int_0^{\infty} dr'\, r'^2 \int_0^{\pi} d\theta' \sin\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \;\, \delta_3(\vec r - \vec r\,')\, f(r',\theta',\varphi')$$

$$\Rightarrow \delta_3(\vec r - \vec r\,') = \frac{1}{r^2}\,\delta(r-r')\,\frac{1}{\sin\theta}\,\delta(\theta-\theta')\,\delta(\varphi-\varphi')$$

$$= \frac{1}{r^2}\,\delta(r-r')\,\delta(\cos\theta-\cos\theta')\,\delta(\varphi-\varphi')$$

$$= \frac{1}{r^2}\,\delta(r-r') \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\varphi)\, Y_{lm}^*(\theta',\varphi')$$

LAPLACEN OPERAATTORIN GREENIN FUNKTIO PALLOKOORDINAATEISSA

$$\nabla_1^2\, G(\vec r_1, \vec r_2) = \delta_3(\vec r_1 - \vec r_2)$$

TIEDÄMME JO: $G(\vec r_1, \vec r_2) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec r_1 - \vec r_2|}$

ON ÄÄRETTÖMYYDESSÄ HÄVIÄVÄ ∇^2:N GREENIN FUNKTIO

JOHDAMME NYT TOISEN LAUSEKKEEN TÄLLE GREENIN FUNKTIOLLE

YRITE: $G(\vec r_1, \vec r_2) = \sum_{l,m} g_l(r_1, r_2)\, Y_{lm}(\theta_1,\varphi_1)\, Y_{lm}^*(\theta_2,\varphi_2)$

lasku jatkuu s. 132

INTERMEZZO:

OPERAATTORIN

$$\mathcal{L}_x = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)$$

EI KOVIN ERIKOINEN MUOTO; VRT. HARJ. 6.4

GREENIN FUNKTIO $G(x,y)$: $x, y \in (a,b)$

$$(1)\quad \mathcal{L}_x G(x,y) = p(x)\frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial x^2} + p'(x)\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} + q(x)G(x,y) = \delta(x-y)$$

OLETETAAN JATKUVIKSI FUNKTIOIKSI

REUNAEHDOT

$$A_1 G(a,y) + A_2 \left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial x}\right|_{x=a} = 0$$

$$B_1 G(b,y) + B_2 \left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial x}\right|_{x=b} = 0$$

ANTAA SIIS EPÄHOMOGEENISEN YHTÄLÖN

$$\mathcal{L}_x u = f(x), \qquad a < x < b$$

REUNAEHDOT $A_1 u(a) + A_2 u'(a) = 0$

$B_1 u(b) + B_2 u'(b) = 0$

RATKAISUN MUODOSSA

$$u(x) = \int_a^b dy\, G(x,y) f(y)$$

YHTÄLÖSSÄ (1) PIDETÄÄN $y \in (a,b)$ KIINTEÄNÄ JA INTEGROIDAAN (1) X:N YLI $y-\varepsilon$:STA $y+\varepsilon$:IIN:

$$\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} dx \left[p(x)\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + p'(x)\frac{\partial G}{\partial x} + q(x) G \right] \simeq$$

p, p', q JATKUVIA $\varepsilon \to 0$

$$\simeq p(y)\Big(\partial_x G(y+\varepsilon,y) - \partial_x G(y-\varepsilon,y)\Big)$$

$$+ p'(y)\Big(G(y+\varepsilon,y) - G(y-\varepsilon,y)\Big) + q(y)\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} dx\, G(x,y)$$

$$\underset{\text{P.O.}}{=} \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} dx\, \delta(x-y) = 1$$

YHTÄLÖ TOTEUTUU, JOS

1° $\lim_{\varepsilon\to 0} G(y+\varepsilon,y) = \lim_{\varepsilon\to 0} G(y-\varepsilon,y)$ ELI G JATKUVA $x=y$:SSÄ

2° $\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\partial_x G(y+\varepsilon,y) - \partial_x G(y-\varepsilon,y)\Big] = \dfrac{1}{p(y)}$

ELI $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ EPÄJATKUVA $x=y$:SSÄ; HYPPÄYS $= \dfrac{1}{p(y)}$

KUN $x<y$ $G(x,y)$ TOTEUTTAA $\mathcal{L}_x G(x,y) = 0$

ALKUEHDOLLA

$$A_1 G(a,y) + A_2 \partial_x G(a,y) = 0$$

SIIS :

$$G_1(x,y) = \frac{u_1(x)\,u_2(y)}{p(y)\,W[u_1,u_2](y)} = \underset{x<y}{G(x,y)}$$

$$G_2(x,y) = \frac{u_1(y)\,u_2(x)}{p(y)\,W[u_1,u_2](y)} = \underset{x>y}{G(x,y)}$$

HUOM. "LEGENDREN IDENTITEETTI"

$$u_1 \mathcal{L}_x u_2 - u_2 \mathcal{L}_x u_1 = \frac{d}{dx}\left[p(x)\,(u_1 u_2' - u_2 u_1')\right]_x$$

$$= \frac{d}{dx}\left[p(x)\,W[u_1,u_2](x)\right]$$

NYT $\mathcal{L}_x u_1 = \mathcal{L}_x u_2 = 0$, JOTEN

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\,W[u_1,u_2](x)\right] = 0$$

JOTEN $p(x)W[u_1,u_2](x)$ ON VAKIO , EI RIIPU x:STÄ

G_1:N JA G_2:N LAUSEKKEISSA NIMITTÄJÄ ON SIIS VAKIO, EIKÄ RIIPU y:STÄ .

(VAIN YKSI EHTO !)

OLKOON RATKAISU $G_1 = C_1(y)\,u_1(x)$

$x > y$ G TOTEUTTAA TAAS $\mathcal{L}_x G = 0$ MUTTA EHTO ON

$$B_1\, G(b,y) + B_2\, \partial_x G(b,y) = 0$$

RATKAISU . $G = G_2 = C_2(y)\,u_2(x)$

$$G_1(y,y) = G_2(y,y) \Rightarrow C_1(y)\,u_1(y) = C_2(y)\,u_2(y)$$

$$\partial_x G_2(y,y) - \partial_x G_1(y,y) = \left[C_2 u_2' - C_1 u_1'\right]_{x=y} = \frac{1}{p(y)}$$

KERTOIMILLE C_1, C_2 SAADAAN SIIS YHTÄLÖRYHMÄ

$$\begin{aligned} u_1(y)\,C_1(y) - u_2(y)\,C_2(y) &= 0 \\ -u_1'(y)\,C_1(y) + u_2'(y)\,C_2(y) &= \frac{1}{p(y)} \end{aligned}$$

RATKAISU C_1, C_2 1-KÄS. JOS

$$u_1(y)u_2'(y) - u_2(y)u_1'(y) = W[u_1,u_2](y) \neq 0$$

ELI u_1, u_2 LIN. RIIPPUMATTOMAT

JOS NÄIN ON , RATKAISU ON

$$C_1(y) = \frac{u_2(y)}{p(y)\,W[u_1,u_2](y)}$$

$$C_2(y) = \frac{u_1(y)}{p(y)\,W[u_1,u_2](y)}$$

$$\nabla_1^2 G(\vec r_1, \vec r_2) = \sum_{l,m}\left(\frac{1}{r_1^2}\frac{d}{dr_1}\left(r_1^2 \frac{dg_l(r_1,r_2)}{dr_1}\right)\right)Y_{lm}(\theta_1,\varphi_1)Y^*_{lm}(\theta_2,\varphi_2)$$

$$+\sum_{l,m} g_l(r_1,r_2)\left(-\frac{1}{r_1^2}\vec L_1^2\, Y_{lm}(\theta_1,\varphi_1)\right)Y^*_{lm}(\theta_2,\varphi_2)$$

$$= \sum_{l,m}\left[\frac{1}{r_1^2}\left(r_1^2\frac{d^2 g_l}{dr_1^2} + 2r_1\frac{dg_l}{dr_1} - l(l+1)g_l\right)\right]Y_{lm}(\theta_1,\varphi_1)Y^*_{lm}(\theta_2,\varphi_2)$$

$$= \delta_3(\vec r_1 - \vec r_2) = \frac{1}{r_1^2}\delta(r_1-r_2)\sum_{l,m} Y_{lm}(\theta_1,\varphi_1)Y^*_{lm}(\theta_2,\varphi_2)$$

$$\Rightarrow \left(r_1^2\frac{d^2}{dr_1^2} + 2r_1\frac{d}{dr_1}\right)g_l(r_1,r_2) - l(l+1)g_l(r_1,r_2) = \delta(r_1-r_2)$$

REUNAEHDOT $|g_l(0,r_2)| < \infty$

$g_l(\infty, r_2) = 0$

TÄMÄN YKSIULOTTEISEN ONGELMAN RATKAISU LÖYTYY EDELLISILLÄ KALVOILLA ESITETTYÄ MENETELMÄÄ KÄYTTÄEN :

HOMOGEENINEN YHTÄLÖ

$$r_1^2\frac{d^2 g_l}{dr_1^2} + 2r_1\frac{dg_l}{dr_1} - l(l+1)g_l = 0$$

Yleinen ratkaisu: $g_l = A(r_2)\,r_1^{l} + B(r_2)\,r_1^{-l-1}$

REUNAEHDOT $\Rightarrow$

$$g_l(r_1,r_2) = A(r_2)\,r_1^{l} \qquad r_1 < r_2$$

$$= B(r_2)\,r_1^{-l-1} \qquad r_1 > r_2$$

EHDOT : 1° $g_l(r_1,r_2)$ JATKUVA P. $r_1 = r_2$

2° $\dfrac{dg_l(r_2+\varepsilon,r_2)}{dr_1} - \dfrac{dg_l(r_2-\varepsilon,r_2)}{dr_1} = \dfrac{1}{r_2^2}$

1° $\Rightarrow$ $A(r_2)\,r_2^{l} = B(r_2)\,r_2^{-l-1}$

$\Rightarrow B(r_2) = A(r_2)\,r_2^{2l+1}$

2° $-(l+1)B(r_2)\,r_2^{-l-2} - lA(r_2)\,r_2^{l-1} = \dfrac{1}{r_2^2}$

$\overset{(1°)}{\Rightarrow}$ $(2l+1)A(r_2)\,r_2^{l+1} = -1$

$\Rightarrow A(r_2) = -\dfrac{1}{2l+1}\,r_2^{-l-1}$

$B(r_2) = -\dfrac{1}{2l+1}\,r_2^{l}$

$\Rightarrow g_l(r_1,r_2) = -\dfrac{1}{2l+1}\dfrac{r_<^{l}}{r_>^{l+1}}$ $\qquad r_< = \min(r_1,r_2)$, $r_> = \max(r_1,r_2)$

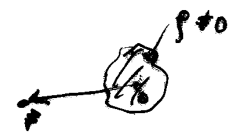
$$\Rightarrow G(\vec r_1,\vec r_2) = -\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\frac{r_<^{l}}{r_>^{l+1}}Y_{lm}(\theta_1,\varphi_1)Y^*_{lm}(\theta_2,\varphi_2)$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec r_1 - \vec r_2|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\vec r_1 - \vec r_2|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^{l}}{r_>^{l+1}}Y_{lm}(\theta_1,\varphi_1)Y^*_{lm}(\theta_2,\varphi_2) \qquad (1)$$

KÄYTTÖ SÄHKÖSTATIIKASSA :

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$



$$= \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{\ell,m}\frac{1}{2\ell+1}\,\frac{Y_{\ell m}(\theta,\varphi)}{r^{\ell+1}}\int d^3r' \, r'^{\ell}\, Y^*_{\ell m}(\theta',\varphi')\,\rho(\vec{r}\,')$$

$r_> = |\vec{r}|$
$r_< = |\vec{r}\,'|$

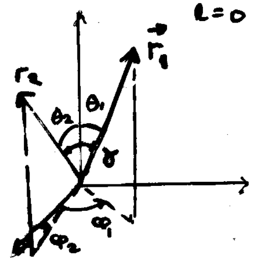
MULTIPOOLIKEHITELMÄ

SOVELLAMME KAAVAA TOISIN :

LEGENDREN POLYNOMIEN GENEROIVA FUNKTIO :

$$\frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} = \frac{1}{r_>}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r_<}{r_>}\cos\gamma+\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2}}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r_<^{\ell}}{r_>^{\ell+1}}P_\ell(\cos\gamma)$$



VERTAAMALLA KAAVAAN (2)
SAADAAN

$$\boxed{P_\ell(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell}Y_{\ell m}(\theta_1,\varphi_1)\,Y^*_{\ell m}(\theta_2,\varphi_2)}$$

"YHTEENLASKULAUSE"

BESSELIN FUNKTIOT

WILHELM BESSEL 1784 – 1846

BESSELIN YHTÄLÖ :

$$f''(z) + \frac{1}{z}f'(z) + \left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)f = 0$$

OTAMME $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu \geq 0$

SARJAYRITE $\quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \, z^{k+r}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\left[(k+r)^2-\nu^2\right]f_k + f_{k-2}\right\}z^{k+r} = 0$$

$(f_{-1} = f_{-2} = 0)$

$k=0 \Rightarrow$ KARAKTERISTINEN YHTÄLÖ

$$r^2-\nu^2 = 0$$

RATK. $\quad r_1 = \nu \qquad r_2 = -\nu$

ANTAA AINA RATKAISUN

$$f_k = -\frac{f_{k-2}}{k(k+2\nu)} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$f_{-1} \equiv 0 \Rightarrow f_{2n+1} = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots \quad$ (PARITTOMAT)

MERKITÄÄN $\quad b_k = f_{2k} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$

$$b_k = -\frac{b_{k-1}}{2^2\,k(k+\nu)}$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\frac{1}{k!\,(\nu+1)_k}b_0 = \frac{(-1)^k\,\Gamma(\nu+1)}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\cdot b_0$$

$$\Rightarrow f(z) = f_0\, z^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

SARJA SUPPENEE KAIKILLA z

KUN VALITAAN $f_0 = \dfrac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$ SAADAAN

1. LAJIN BESSELIN FUNKTIO

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}$$

JOS $s = r_1 - r_2 = 2\nu \neq$ KOKONAISLUKU ON $J_{-\nu}(z)$

TÄSTÄ RIIPPUMATON TOINEN RATKAISU :

$$J_{-\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{\Gamma(-\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2k}$$

OSOITTAAKSEMME TÄMÄN, LASKEMME WRONSKIN DETERMINANTIN

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = J_\nu(z) J_{-\nu}'(z) - J_\nu'(z) J_{-\nu}(z)$$

$$= W_0 \, e^{-\int_{z_0}^{z} dz' \frac{1}{z'}} = \frac{C}{z}$$

VAKION C ARVO VOIDAAN LASKEA PIENILLÄ $|z|$, JOLLOIN

$$J_{\pm\nu}(z) = \frac{1}{\Gamma(1\pm\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm\nu} \left(1 + \mathcal{O}(z^2)\right)$$

$$\Rightarrow J_{\pm\nu}'(z) = \frac{1}{2\Gamma(\pm\nu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm\nu-1} \left(1 + \mathcal{O}(z^2)\right)$$

$$\Rightarrow W(J_\nu, J_{-\nu}) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)} - \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)\Gamma(\nu)}\right) + \cdots$$

$$= -\frac{2\sin(\pi\nu)}{\pi z} + \cdots \quad \Rightarrow C = -\frac{2\sin(\pi\nu)}{\pi} \neq 0$$

$$\uparrow$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \qquad \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

HUOM! JOS $\nu = l + \frac{1}{2}$, $l = 0, 1, 2, \ldots$ ON

$s = 2\nu = 2l+1$ KOKONAISLUKU , MUTTA EDELLEEN

$$W(J_{l+1/2}, J_{-l-1/2}) \neq 0$$

ELI TÄLLÖINKIN $J_{l+1/2}(z)$ JA $J_{-l-1/2}(z)$ OVAT BESSELIN YHTÄLÖN LIN. RIIPPUMATTOMIA RATKAISUJA.

ENTÄ KUN $\nu = n = 0, 1, 2, \ldots$?

$\Gamma(n+k+1) = (n+k)!$

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}$$

NYT

$$J_{-n}(z) = \lim_{\nu \to -n} J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(-n+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2k}$$

$\Gamma(-n) = \infty \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad \Rightarrow \dfrac{1}{\Gamma(-n+k+1)} = 0 \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$

SUMMA ALKAA SIIS VASTA TERMILLÄ $k = n$

UUSI SUMMAUSINDEKSI $m = k - n$

$\Gamma(k-n+1) = \Gamma(m+1) = m!$

$$\Rightarrow J_{-n}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)!\, m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} = (-1)^n J_n(z)$$

EI ANNA UUTTA RATKAISUA

NEUMANNIN / WEBERIN } FUNKTIOT

ELI 2. LAJIN BESSELIN FUNKTIOT

(KARL NEUMANN 1832 - 1925 ; HEINRICH WEBER 1842 - 1913)

$$Y_\nu(z) \equiv \frac{\cos(\nu\pi) J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} \equiv N_\nu(z)$$

ON BESSELIN YHTÄLÖN RATKAISU KUN $\nu \neq n$

$\nu \to n$ $\quad \cos(n\pi) J_n(z) - J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) - (-1)^n J_n(z) = 0$

$\sin(n\pi) = 0$

RAJA-ARVO KUN $\nu \to n$ SAADAAN L'HOSPITALIN SÄÄNNÖN AVULLA :

$$Y_n(z) = \lim_{\nu \to n} Y_\nu(z) = \left. \frac{\frac{\partial}{\partial \nu}\left[\cos(\nu\pi) J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)\right]}{\frac{\partial}{\partial \nu} \sin(\nu\pi)} \right|_{\nu = n}$$

$$= \frac{1}{\pi \cos(n\pi)} \left(-\pi \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} J_n(z) + \left[(-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(z) - \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(z) \right]_{\nu = n} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(z) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(z) \right]_{\nu = n}$$

$Y_n(z)$ TOTEUTTAA BESSELIN YHTÄLÖN :

DERIVOIDAAN

$$\frac{d^2 J_{\pm\nu}}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d J_{\pm\nu}}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) J_{\pm\nu} = 0$$

ν : N SUHTEEN $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dz^2} \frac{\partial}{\partial \nu} J_{\pm\nu} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \frac{\partial}{\partial \nu} J_{\pm\nu} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) \frac{\partial}{\partial \nu} J_{\pm\nu} = 2\nu J_{\pm\nu}$$

KERROTAAN $\frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}$: N TOTEUTTAMA YHTÄLÖ $(-1)^\nu$: LLÄ JA LASKETAAN YHTÄLÖIDEN EROTUS

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu - (-1)^\nu \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu} \right) + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu - (-1)^\nu \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu} \right)$$

$$+ \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu - (-1)^\nu \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu} \right) = 2\nu \left(J_\nu - (-1)^\nu J_{-\nu} \right)$$

ANNETAAN $\nu \to n$ JA MUISTETAAN $(-1)^n J_{-n} = J_n$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu - (-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu} \right)_{\nu = n} = 0$$

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} - \log n \right) \simeq 0.577\ldots$$

OMINAISUUKSIA :

$x \to 0$ $\quad Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left(\log x + \gamma - \log 2 \right) + \mathcal{O}(x^2)$

$$Y_n(x) = \frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x} \right)^n + \cdots$$

HANKELIN FUNKTIOT

ELI 3. LAJIN BESSELIN FUNKTIOT

(HERMANN HANKEL 1839 - 1873)

$$H_\nu^{(1)}(z) \equiv J_\nu(z) + i Y_\nu(z)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) \equiv J_\nu(z) - i Y_\nu(z)$$

BESSEL, NEUMANN WEBER, HANKEL : SYLINTERIFUNKTIOT