

## Luku 14

# Elektrodynamiikka ja suhteellisuusteoria

Tämän luvun esitiedoksi oletetaan fysiikan peruskursseilta tutut Lorentzin muunnokset, pituuskontraktio ja ajan venyminen. Tarvitsemme lisäksi joi-tain tensorilaskennan perustaitoja, jotka esitellään lyhyesti mutta tähän tarkoitukseen riittävästi. Johdatus tensoreihin löytyy CL:n lisäksi kirjois-ta *Honkonen, Pitkänen, Perko: Fysiikan matemaattiset apuneuvot* (Limes, 1994) tai *Arfken & Weber: Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, 1995) sekä useimmista suhteellisuusteorian oppikirjoista.

### 14.1 Lorentzin muunnos

Kuten edellisessä luvussa kävi ilmi, suhteellisuusteoria ja elektrodynamiikka liittyvät läheisesti toisiinsa. Koordinaatistomuunnosten merkitys elektrodynamiikassa ilmenee esimerkiksi tilanteessa, jossa on varauksia levossa tarkastelijan suhteen. Hän näkee niistä aiheutuvan sähkökentän, mutta ne eivät aiheuta hänen koordinaatistossaan magneettikenttää. Jos tarkasteli-ja kuitenkin liikkuu varauksiin nähden, varaukset kuljettavat tarkastelijan näkökulmasta sähkövirtaa ja aiheuttavat magneettikentän. Niinpä sähkö- ja magneettikentät muuntuvat jollain tavoin toisikseen liikkeen seurauksena.

Ehkä vieläkin tärkeämpi esimerkki liittyy lukuun 7, jossa kuljetettiin johdetankoa magneettikentässä ja saatiin aikaan sähkökenttä. Siirrettiinpä tankoa magneettikentässä, kestopagneettia tangon suhteen tai muutettiin magneettikenttää ajan suhteen, kaikissa tapauksissa pätee *sama* Faradayn laki:  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ . Siis vaikka kentät itsessään riippuvat liiketilasta, niitä toisiinsa sitova fysikaalinen laki on liikkeestä riippumatta sama.

Sähkömagneettisen aallon olemassaolo oli 1800-luvun lopulla kokeelli-nen tosiasia. Kysymys, missä koordinaatistossa sen nopeus on tasan  $c$ , oli

ongelmallinen. Tähän liittyi kysymys eetteristä, johon mm. Maxwell oli itse uskonut ja joka oli hänelle ilmeisesti varsinainen syy kentänmuutosvirran käyttöönottoon. Kentänmuutosvirta pelasti jatkuvuusyhtälön, mikä oli tietenkin hyvä asia sinänsä, mutta ei onnistunut lopulta pelastamaan eetteriä. Vuosisadan loppupuolen havainnot tähden näennäisen paikan pienestä siirtymisestä Maan rataliikkeen suuntaan sekä kuuluisa Michelsonin ja Morleyn koe, jolla pyrittiin määrittämään Maan liikenopeus eetterin koordinaatistossa, kuitenkin viittasivat siihen, että valo etenee tyhjiössä vakionopeudella havaittujen koordinaatistosta riippumatta.

Liikkukoon koordinaatisto  $K'$  koordinaatiston  $K$  suhteen  $x$ -suuntaan vakionopeudella  $v$  siten, että koordinaatistojen akselit ovat samansuuntaisia ja origot yhtyvät nolлахetkellä. Tällöin koordinaattien klassinen Galilein muunnos  $K \rightarrow K'$  on  $x' = x - vt, y' = y, z' = z, t' = t$ . Newtonin lait ovat samat molemmissa systeemeissä. Sijottamalla tämä muunnos yksikertaiseen aaltoyhtälöön tyhjiössä, on helppo nähdä, että aaltoyhteälö ei ole sama molemmissa koordinaatistoissa.

Vuonna 1904 Lorentz huomasi, että varsin erikoinen koordinaatistomuunnos jätti Maxwellin yhtälöt ja siten myös niistä johdetun aaltoyhtälön samoiksi. Asian yksinkertaistamiseksi tarkastellaan homogeenista skalaarimuotoista aaltoyhtälöä, joka kuvaa valonnopeudella  $(x, y, z)$ -koordinaatistossa  $K$  etenevää aaltoa:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \quad (14.1)$$

Olkoon  $K'$  toinen koordinaatisto, joka liikkuu tasaisella nopeudella  $v$   $x$ -akselin suuntaan. Lorentzin muunnos on<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left( t - \frac{v}{c^2} x \right). \end{aligned} \quad (14.2)$$

Osittaisderivaatat muuntuvat muotoon

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial y'}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'}. \end{aligned} \quad (14.3)$$

<sup>1</sup>Suhteellisuusteoreetikot käyttävät yleensä yksikköjärjestelmää, jossa  $c = 1$ . Me emme tee niin.

Sijoitetaan nämä aaltoyhtälöön, jolloin saadaan koordinaatistossa  $K'$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2} \quad (14.4)$$

eli aalto etenee samalla nopeudella  $c$  myös koordinaatistossa  $K'$ .

Tässä Lorentzilla oli jälleen tilaisuus keksiä suhteellisuusteoria. Hän ei ilmeisesti kuitenkaan täysin ymmärtänyt muunnoksen merkitystä. Ehkä se soti vastoin myös hänen käsitystään eetterin olemassaolosta. Suhteellisuusteorian merkityksen oivalsivat ensimmäisinä Poincaré ja Einstein. Poincaré oli jo vuonna 1899 esittänyt *suhteellisuusteorian*, jonka mukaan *fysiikan lakien pitää olla samat toistensa suhteen tasaisessa liikkeessä olevissa koordinaatistoissa*. Vuonna 1905 Einstein lisäsi tähän postulaatin, että *valonnopeus tyhjiössä on sama kaikissa koordinaatistoissa ja riippumaton valoa lähettävän kappaleen liikkeestä*. Suppeampi suhteellisuusteoria oli syntynyt.

Tarkastellaan Lorentzin muunnosta neliulotteisessa avaruudessa, jonka paikkavektori on  $X = (ct, x, y, z)$ . Sen koordinaatteja merkitään  $x^\alpha$ , missä  $\alpha = 0, 1, 2, 3$ . Jatkossa käytetään kreikkalaisia indeksejä osoittamaan neliavaruuden komponentteja ja latinalaisia indeksejä tavallisen kolmiulotteisen kotiavaruuden komponenteille (1,2,3 tai  $x, y, z$ ). Otetaan lisäksi käyttöön merkinnät  $\beta = v/c$  sekä  $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - \beta^2} = \sqrt{1 - (v/c)^2}$ . Kaikilla vektoreilla (nelinopeus, nelivoima, neliliikemäärä jne.) on nyt neljä komponenttia. Esimerkiksi *nelinopeus*  $u$  on

$$u = \frac{dX}{d\tau}, \quad (14.5)$$

missä  $d\tau = dt\sqrt{1 - \beta^2}$  on liikkeessä olevan olion *itseisaika* eli aika mitattuna sen omassa lepokoordinaatistossa.

Sellaiset muunnokset, jotka jättävät *neliömuodon*

$$I = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (14.6)$$

invariantiksi ( $I = I'$ ) koordinaatistomuunnoksessa  $K \rightarrow K'$ , ovat Lorentzin muunnoksia. Tämän voi todeta esimerkiksi sähkömagneettiselle aallolle tilanteessa, jossa koordinaatistojen origot ovat samat hetkellä  $t = 0$  ja  $t' = 0$ . Jos origosta lähtee tuolla hetkellä aalto,  $I = 0$  aaltorintaman mukana kummassakin koordinaatistossa.

### Lorentzin muunnoksen johtaminen

Esitetään tässä kertauksen vuoksi yksi hyvin yleisiin periaatteisiin perustuva tapa johtaa Lorentzin muunnoskaavat (ks. K. ja R. Kurki-Suonio, Vuorovaikuttavat kappaleet). Liikkukoon koordinaatisto  $K'$  koordinaatiston  $K$

suhteen vakionopeudella  $\mathbf{v}$ . Havaittajat  $O$  ja  $O'$  havaitsevat saman tapahtuman ja määrittävät sen paikan ja hetken:  $(x, y, z, t)$  ja  $(x', y', z', t')$ . Lisäksi oletetaan, että heillä on yhteinen standardi, jonka perusteella he käyttävät samoja mittayksiköitä. Etsitään havaintojen välinen yhteys käyttäen neljää yleistä ehtoa.

**Ehto 1.** Aika ja avaruus ovat homogeenisia ja isotrooppisia. Kahden infinitesimaalisen lähekkäisen tapahtuman siirtymien ja aikavälien välinen muunnos  $(d\mathbf{r}, dt) \leftrightarrow (d\mathbf{r}', dt')$  on silloin sama aina ja kaikkialla eli niiden välillä on lineaarinen yhteys. Tästä seuraa, että myös koordinaattien välinen yhteys on lineaarinen:

$$\begin{aligned}x' &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1t + e_1 \\y' &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2t + e_2 \\z' &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3t + e_3 \\t' &= a_4x + b_4y + c_4z + d_4t + e_4,\end{aligned}$$

missä  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i$  ovat vakioita.

Yleisyyttä rajoittamatta voidaan sopia, että koordinaatistojen origot yhtyvät kummankin nolлахetkellä. Voidaan myös sopia, että koordinaattiakselit ovat samansuuntaisia ja että  $K'$  liikkuu  $K$ :n  $x$ -akselia pitkin positiiviseen suuntaan. Tällöin yhtälöryhmä yksinkertaistuu muotoon

$$\begin{aligned}x' &= ax + bt \\y' &= y ; z' = z \\t' &= hx + kt.\end{aligned}$$

**Ehto 2.** Koordinaatistojen suhteellinen nopeus on kummankin havaitsijan mielestä sama. Tällöin  $K'$ :n origossa hetkellä  $t'$  sattuva tapahtuma havaitaan  $K$ :ssa hetkellä  $t$  pisteessä  $x = vt$  tapahtuvaksi:  $(vt, t) \leftrightarrow (0, t')$ . Vaaditun symmetrian mukaan pätee vastaavasti  $(0, t) \leftrightarrow (-vt', t')$ . Sijoittamalla muunnoskaavoihin saadaan

$$\begin{aligned}0 &= avt + bt \\t' &= hvt + kt \\-vt' &= bt \\t' &= kt.\end{aligned}$$

Muunnos siis pelkistyy muotoon

$$\begin{aligned}x' &= k(x - vt) \\y' &= y ; z' = z \\t' &= k(t - \alpha x) ; \alpha = h/k.\end{aligned}$$

**Ehto 3.** Valonnopeus  $c$  on absoluuttinen. Tämä on ratkaiseva ero klassiseen Galilein muunnokseen verrattuna. Ajatellaan, että yhteisellä nollahetkellä yhteisessä origossa tapahtuu valonvälähdys. Valon saapuminen mielivaltaisessa pisteessä olevaan ilmaisimeen havaitaan hetkillä  $t$  ja  $t'$ . Tapahtumien vastaavuus on  $(x = ct, t) \leftrightarrow (x' = ct', t')$ , koska  $c$  on sama kummankin havaitsijan mielestä. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} ct' &= k(ct - vt) \\ t' &= k(t - \alpha ct) \end{aligned}$$

ja voidaan ratkaista  $\alpha = v/c^2$ .

**Ehto 4.** Käänteismuunnos saadaan symmetrisesti vaihtamalla nopeuden etumerkki eli molempien inertiaalikoordinaatistojen on oltava samassa asemassa (vrt. ehto 2). Tällöin

$$\begin{aligned} x &= k(x' + vt') \\ t &= k(t' + vx'/c^2). \end{aligned}$$

Näin voidaan ratkaista  $k = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ .

Lorentzin muunnoskaavat ovat siis (14.2):

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma(t - vx/c^2). \end{aligned}$$

## 14.2 Tensorilaskentaa

Edellä ollut  $x$ -akselin suuntainen Lorentzin muunnos voidaan kirjoittaa matriisiyhtälönä

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (14.7)$$

Merkitsemällä kerroinmatriisia  $\Lambda$ :lla tämä voidaan kirjoittaa tensorimuodossa

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad (14.8)$$

missä on käytetty *Einsteinin summaussääntöä* eli toistetun indeksin yli summataan:

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu} \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}. \quad (14.9)$$

Tässä luvussa käytettävissä tensoriformalismissa indeksien paikka ja järjestys ovat tärkeitä. Toisen kertaluvun tensoreilla indeksien järjestys kertoo, onko kyseessä tensorin matriisiesityksen vaakarivi vai pystyrivi. Vektoria, jolla on yläindeksi, kutsutaan *kontravariantiksi* vektoriksi ja alaindeksillä varustettua vektoria puolestaan *kovariantiksi* vektoriksi. Summaus tapahtuu aina ylä- ja alaindeksin välillä.<sup>2</sup>

Kahdesta kontravariantista vektorista  $u^\mu$  ja  $v^\nu$  muodostetaan toisen kertaluvun *tensori*  $T^{\mu\nu}$  suorana tulona, jonka komponentit muodostavat matriisin  $u^\mu v^\nu$ . Tensori  $T^{\mu\nu}$  muuntuu siis seuraavasti:

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta T^{\alpha\beta}. \quad (14.10)$$

Muotoillaan määritelmä yleisemmin: Jokaista suuretta  $T^{\alpha\beta}$ , joka muuntuu tällä tavalla Lorentz-muunnoksessa, sanotaan 2. kertaluvun (kontravariantiksi) tensoriksi.

Kahden kontravariantin nelivektorin pistetulo määritellään puolestaan

$$A \cdot B = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta, \quad (14.11)$$

missä

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14.12)$$

on *metrisen perustensori*.<sup>3</sup> Se on symmetrinen ( $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ ) ja sillä on käänteismatriisi  $g^{\alpha\beta}$  eli  $g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$ , missä  $\delta^\alpha_\gamma$  on yksikkötensori eli Kroneckerin deltan neliulotteinen vastine, jolle  $\delta^\alpha_\gamma = 1$ , kun  $\alpha = \gamma$  ja muulloin  $\delta^\alpha_\gamma = 0$ .

Metrisellä perustensorilla on tärkeä laskutekninen rooli. Koska summaus tapahtuu aina ylä- ja alaindeksin välillä, täytyy esimerkiksi kahden kontravariantin vektorin pistetuloa laskettaessa toinen muuntaa kovariantiksi eli laskea sen indeksi alas. Indeksin nosto- ja laskuoperaatiot tapahtuvat seuraavasti:

$$v^\beta = g^{\alpha\beta} v_\alpha; \quad v_\beta = g_{\alpha\beta} v^\alpha. \quad (14.13)$$

Edellä oleva pistetulo (14.11) on siis

$$A \cdot B = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta = A_\beta B^\beta = A^\alpha B_\alpha. \quad (14.14)$$

<sup>2</sup>Vektorien ko- ja kontravarianttisuus ja siten ylä- ja alaindeksien erottelu ovat varsinaisesti tarpeen vasta yleisessä suhteellisuusteoriassa. Tässä yhteydessä se tekee laskemisesta hieman yksinkertaisempaa. Esimerkki formalismista ilman ylä- ja alaindeksijä löytyy esim. kirjasta RMC.

<sup>3</sup>Metrisen perustensorin komponenttien  $\pm$ -merkit määritellään joko näin tai päinvastoin. Valinnalla ei ole fysikaalista merkitystä, mutta laskettaessa on pidettävä kiinni tehdystä valinnasta. Lisäksi indeksit on syytä kirjoittaa selvästi peräkkäin, etteivät vaaka- ja pystyrivit mene sekaisin.

Samalla tavalla nostetaan ja lasketaan toisen tai korkeamman kertaluvun tensoreiden indeksejä:

$$T_{\alpha}^{\beta} = g_{\alpha\omega} T^{\omega\beta}. \quad (14.15)$$

Invariantti neliömuoto  $I$  ennen Lorentzin muunnosta on

$$I = g_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} \quad (14.16)$$

ja Lorentzin muunnoksen jälkeen ( $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} x^{\alpha}$ )

$$I' = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} x^{\alpha} x^{\beta}. \quad (14.17)$$

Vaativuus  $I = I'$  antaa ehdon

$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} = g_{\alpha\beta} \quad (14.18)$$

tai

$$g^{\mu\nu} \Lambda^{\alpha}_{\mu} \Lambda^{\beta}_{\nu} = g^{\alpha\beta}. \quad (14.19)$$

Vain sellaiset muunnokset, jotka toteuttavat tämän yhtälön, ovat Lorentzin muunnoksia. Yleisessä lineaarisessa muunnoksessa on 16 vapaata parametria ja ehdossa (14.19) on 10 eri yhtälöä, joten Lorentzin muunnoksessa on kuusi vapaata parametria: pusku jokaisen (kolmiavaruuden) koordinaattiakselin suuntaan ja kierto jokaisen akselin ympäri.

Määritetään vielä  $(\Lambda^{-1})^{\alpha}_{\gamma}$ . Merkitään  $M^{\alpha}_{\gamma} = g^{\alpha\beta} \Lambda^{\nu}_{\beta} g_{\nu\gamma}$  ja kerrotaan puolittain  $\Lambda^{\mu}_{\alpha}$ :lla:

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha} M^{\alpha}_{\gamma} = g^{\alpha\beta} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} g_{\nu\gamma} = g^{\mu\nu} g_{\nu\gamma} = \delta^{\mu}_{\gamma},$$

joten

$$(\Lambda^{-1})^{\alpha}_{\gamma} = g^{\alpha\beta} \Lambda^{\nu}_{\beta} g_{\nu\gamma} = \Lambda_{\gamma}^{\alpha}. \quad (14.20)$$

**HT:** Laske  $\Lambda^{-1}$   $x$ -akselin suuntaisen Lorentzin muunnoksen tapauksessa.

## 14.3 Lorentzin muunnokset ja dynamiikka

Vaikka suhteellisuusteorian fysikaalinen perusta onkin elektrodynamiikassa – valonnopeushan on nimenomaan sähkömagneettisen aallon nopeus, Lorentzin muunnokset, ajan venyminen jne. ovat useille tutumpia mekaanisen liikkeen avulla annetuissa esimerkeissä (toisensa ohittavat tosinopeat junat, liian pieneen talliin työnnettävä seiväs jne).

Valonnopeus on rajanopeus, jolla vain massaton hiukkanen voi edetä. Sitä ei voi saavuttaa laskemalla yhteen nopeuksia, jotka ovat alle valonnopeuden, eli esimerkiksi tekemällä kaksi Lorentzin muunnosta peräkkäin.

Yhtälöt (14.2) kuvaavat muunnosta koordinaatistoon  $K'$ , joka liikkuu nopeudella  $v$  koordinaatiston  $K$  suhteen. Liikkukoon sitten koordinaatisto  $K''$  nopeudella  $v'$  koordinaatiston  $K'$  suhteen, jolloin

$$\begin{aligned}x'' &= \frac{1}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} (x' - v't') \\y'' &= y' \\z'' &= z' \\t'' &= \frac{1}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} \left( t' - \frac{v'}{c^2} x' \right).\end{aligned}\tag{14.21}$$

Sijoittamalla tähän systeemin  $K'$  (yhdeällä pilkulla merkityt) koordinaatit muunnoksen (14.2) mukaisesti saadaan yhdistetty muunnos

$$\begin{aligned}x'' &= \frac{1}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} (x - wt) \\y'' &= y \\z'' &= z \\t'' &= \frac{1}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \left( t - \frac{w}{c^2} x \right),\end{aligned}\tag{14.22}$$

missä

$$w = \frac{v + v'}{1 + vv'/c^2}.\tag{14.23}$$

Tämä on *nopeuksien yhteenlaskukaava*. Olivatpa  $v$  ja  $v'$  kuinka lähellä valonnopeutta tahansa, niiden summa jää kuitenkin alle valonnopeuden. Mათემაattisesti tämä on seuraus siitä, että Lorentzin muunnokset muodostavat *ryhmän*. Yhdistämällä kaksi muunnosta saadaan uusi Lorentzin muunnos, tässä tapauksessa koordinaatistosta  $K$  koordinaatistoon  $K''$ , joiden suhteellinen nopeus on  $w$ . Laskukaavaa sovellettaessa täytyy olla tarkkana suhteellisten nopeuksien suuntien (eli etumerkkien) kanssa.

*Suppea suhteellisuusperiaate* voidaan ilmaista sanomalla, että *kaikki Lorentzin muunnosten yhdistämät inertiaalijärjestelmät ovat samanarvoisia kaikkien fyysikaalisten tapahtumien kuvailussa*. Tämä jättää kiihtyvät koordinaatistot, mutta *ei* suinkaan kiihtyvää liikettä, tarkastelun ulkopuolelle. Tarkastellaan seuraavaksi lyhyesti tavallista massapistemekaniikkaa suhteellisuusperiaatteen valossa.

Kutsutaan massapisteen (hiukkasen) liikerataa neliavaruudessa sen *maailmanviivaksi* ja merkitään sen koordinaatteja  $x^\mu$ . Differentiaalit  $dx^\mu$  määrittävät hiukkasen differentiaalisen siirtymän pitkin maailmanviivaa. Muodostetaan sitten Lorentz-invariantti skalaarisuure

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,\tag{14.24}$$

joka on sama kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa. Tarkastellaan nyt hiukkasta koordinaatistossa, jossa se on hetkellisesti levossa. Tällöin

$$dx' = (dx'^0, 0, 0, 0) \quad (14.25)$$

eli tässä koordinaatistossa vain aika kuluu. Nyt

$$ds^2 = g_{00}(dx'^0)^2 = c^2(dt')^2. \quad (14.26)$$

Ajanlaatuinen suure  $ds/c$  on invariantti aikaväli hiukkasen hetkellisessä lepokoordinaatistossa eli se on hiukkasen mukana liikkuvan kellon mittaama aikaväli. Määritellään kiinteästä maailmanpisteestä  $s_A$  (siis neliulotteisesta pisteestä, nelipaikasta) laskettu hiukkasen *ominaisaika* integraalina

$$\tau = \frac{1}{c} \int_{s_A}^s ds = \int_{t_A}^t dt \left\{ 1 - \frac{1}{c^2} \left[ \left( \frac{dx^1}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dx^2}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dx^3}{dt} \right)^2 \right] \right\}^{1/2}. \quad (14.27)$$

Tässä esiintyy kolminopeus  $\mathbf{v}$  koordinaatistossa  $K$ :

$$\mathbf{v} = \left( \frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt} \right). \quad (14.28)$$

Ominaisajan differentiaalinen muoto on sama kuin kappaleessa 14.1 mainittu

$$\frac{d\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = dt, \quad (14.29)$$

joka kuvaa ajan venymistä liikkeessä olevassa koordinaatistossa.

Hiukkasen *nelinopeus*  $u$  määritellään sen nelipaikan derivaattana ominaisajan suhteen. Nelinopeuden komponentit ovat

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (14.30)$$

Kolminopeuden avulla ilmaistuna tämä on  $u = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$ . Suoralla laskulla nähdään, että nelinopeuden neliö on invariantti:

$$u^2 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = c^2. \quad (14.31)$$

Vastaavasti määritellään *nelikiihtyvyys*

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}. \quad (14.32)$$

Nelinopeus on nelivektori, koska  $x^\mu$  on nelivektori ja  $d/d\tau$  on invariantti. Siten myös nelikiihtyvyys on nelivektori.

Tarkastellaan sitten Newtonin liikeyhtälöä

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (14.33)$$

missä  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  on liikemäärä. Tämä on kuitenkin Galilei-invariantti yhtälö, missä mikään ei rajoita nopeutta alle valonnopeuden. Muodostetaan nelivektoriyhtälö

$$m_0 \frac{d}{d\tau} u^\mu = K^\mu, \quad (14.34)$$

missä  $m_0$  on massanlaatuinen invariantti vakiosuure ja  $K^\mu$  nelivoima. Jotta tämä olisi kelvallinen liikeyhtälö pienen nopeuden rajalla (sama asia kuin raja  $c \rightarrow \infty$ ), sen avaruusosasta on saatava Newtonin liikeyhtälö. Käyttään koordinaattiaikaa  $t$  kirjoitetaan yhtälön avaruuskomponentit muodossa

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1 - \beta^2}} = K^i \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (14.35)$$

Jos ulkoinen voima on nolla, liikemäärä on vakio, joten liikemäärän määritelmäksi tulee

$$p^i = \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (14.36)$$

joka rajalla  $\beta \rightarrow 0$  vastaa Newtonin mekaniikan liikemäärää. Näin kolmivoiman ja nelivoiman välinen yhteys on

$$F^i = K^i \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (14.37)$$

Liikeyhtälön (14.34) nollannen komponentin määrittämiseksi kirjoitetaan se nelikiihtyvyyden  $a^\mu$  avulla

$$m_0 a^\mu = K^\mu. \quad (14.38)$$

Laskemalla nelikiihtyvyyden ja nelinopeuden pistetulo saadaan

$$g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} c^2 = 0 \quad (14.39)$$

eli nelikiihtyvyys ja nelinopeus ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, joten myös

$$g_{\mu\nu} K^\mu u^\nu = 0. \quad (14.40)$$

Sijoittamalla tähän nelinopeuden komponentit ( $u = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$ ) ja nelivoiman avaruusosa jää jäljelle

$$\frac{c}{\sqrt{1 - \beta^2}} K^0 = \sum_{i=1}^3 \frac{v^i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{F^i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (14.41)$$

eli

$$K^0 = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (14.42)$$

Liiketyhtälön nollas komponentti on siis

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (14.43)$$

Hiukkasen liike-energia määritellään Newtonin mekaniikassa siten, että sen aikaderivaatta (teho) on  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ . Tarkastellaan sitten energianlaatuista suuretta

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (14.44)$$

Binomisarjan avulla saadaan

$$W = m_0 c^2 \left[ 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^4}\right) \right]. \quad (14.45)$$

Epärelativistisella rajalla ( $\beta \rightarrow 0$ ) tästä tulee

$$W = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (14.46)$$

eli Newtonin mekaniikan mukainen  $m_0$ -massaisen hiukkasen liike-energia ja suure  $m_0 c^2$ , jota kutsutaan  $m_0$ -massaisen hiukkasen *lepoenergiaksi*.

Nyt *neliliikemäärä* voidaan kirjoittaa muodossa

$$p = \left( \frac{W}{c}, \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \quad (14.47)$$

tai

$$\bar{p}^\mu = m_0 u^\mu. \quad (14.48)$$

Tämän invariantiksi neliöksi saadaan

$$g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = (m_0 c)^2 = W^2/c^2 - \mathbf{p}^2. \quad (14.49)$$

Relativistiset liiketyhtälöt voi tiivistää muotoon

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = K^\mu. \quad (14.50)$$

**Huom.** Hiukkasen *massa* on  $m_0$ . Sitä kutsutaan joskus lepomassaksi, mutta siihen ei ole mitään syytä, sillä massa  $m_0$  on itseasiassa Lorentz-invariantti suure, joka määrittelee *lepoenergian* kaavalla

$$W_0 = \lim_{v \rightarrow 0} W = m_0 c^2. \quad (14.51)$$

## 14.4 Elektrodynamiikan kovariantti formulointi

Tarkastellaan seuraavaksi Lorentzin voiman lauseketta muodossa

$$F^i = q(E^i + \epsilon^i_{jk} v^j B^k), \quad (14.52)$$

missä  $\epsilon_{ijk}$  on permutaatiotensori ja summataan toistettujen indeksien yli (**HT**: kertaa  $\epsilon_{ijk}$ :n ominaisuudet). Varaus  $q$  oletetaan invariantiksi säilymislain perusteella. Edellä saatiin hiukkasen liikeyhtälö muotoon

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu, \quad (14.53)$$

missä nelivoiman komponentit ovat

$$K^0 = \frac{\gamma}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}; \quad K^i = \gamma F^i. \quad (14.54)$$

Oletetaan nyt, että kyseisen voiman avaruusosa on juuri Lorentzin voima. Kirjoitetaan liikeyhtälö komponenteittain. Aikakomponentista tulee

$$\frac{dp^0}{d\tau} = K^0 = \frac{\gamma}{c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{\gamma}{c} q \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \quad (14.55)$$

eli kentän tekemä työ. Paikkakomponenteista saadaan

$$\begin{aligned} \frac{dp^1}{d\tau} &= \gamma q (E^1 + (v^2 B^3 - v^3 B^2)) = q \left( \frac{E^1}{c} u^0 + u^2 B^3 - u^3 B^2 \right) \\ \frac{dp^2}{d\tau} &= \gamma q (E^2 + (v^3 B^1 - v^1 B^3)) = q \left( \frac{E^2}{c} u^0 + u^3 B^1 - u^1 B^3 \right) \\ \frac{dp^3}{d\tau} &= \gamma q (E^3 + (v^1 B^2 - v^2 B^1)) = q \left( \frac{E^3}{c} u^0 + u^1 B^2 - u^2 B^1 \right) \end{aligned} \quad (14.56)$$

Aika- ja paikkakomponentit voidaan koota yhtälöiksi

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = q u_\beta F^{\beta\mu}, \quad (14.57)$$

missä  $(F^{01}, F^{02}, F^{03}) = (1/c)(E^1, E^2, E^3)$ ,  $(F^{23}, F^{31}, F^{12}) = (B^1, B^2, B^3)$  ja  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ . Tästä saa suoralla laskulla liikeyhtälön komponentit.

Osoitetaan sitten, että  $(F^{\mu\nu})$  on kelvollinen toisen kertaluvun tensori eli että se muuntuu oikein Lorentzin muunnoksissa. Todetaan aluksi, että kovariantin vektorin muunnos on  $u'_\beta = \Lambda_\beta^\alpha u_\alpha = (\Lambda^{-1})^\alpha_\beta u_\alpha$ , minkä voi päätellä suoraan muunnoskaavojen avulla. Sen näkee teknisemminkin nostamalla ja laskemalla indeksejä perustensorin avulla:  $u'_\beta = g_{\mu\beta} u'^\mu = g_{\mu\beta} \Lambda^\mu_\nu u^\nu = g_{\mu\beta} \Lambda^\mu_\nu g^{\nu\alpha} u_\alpha = (\Lambda^{-1})^\alpha_\beta u_\alpha$ , missä käytettiin lopuksi tulosta (14.20). Muunnettu liikeyhtälö on siis

$$\frac{dp'^{\mu}}{d\tau} = q u'_\beta F'^{\beta\mu}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \Lambda^\mu{}_\nu \frac{dp^\nu}{d\tau} &= q\Lambda_\beta{}^\alpha u_\alpha F'^{\beta\mu} = q\Lambda^\mu{}_\nu u_\alpha F^{\alpha\nu} \\
&\Rightarrow \Lambda_\beta{}^\alpha F'^{\beta\mu} = \Lambda^\mu{}_\nu F^{\alpha\nu} \\
\Leftrightarrow (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta F'^{\beta\mu} &= \Lambda^\mu{}_\nu F^{\alpha\nu} \\
\Leftrightarrow \Lambda^\gamma{}_\alpha (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\beta F'^{\beta\mu} &= \Lambda^\gamma{}_\alpha \Lambda^\mu{}_\nu F^{\alpha\nu} \\
\Leftrightarrow F'^{\gamma\mu} &= \Lambda^\gamma{}_\alpha \Lambda^\mu{}_\nu F^{\alpha\nu}. \tag{14.58}
\end{aligned}$$

Tensoria ( $F^{\mu\nu}$ ) kutsutaan *sähkömagneettiseksi kenttätensoriksi* ja sen komponentit ovat

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E^1/c & E^2/c & E^3/c \\ -E^1/c & 0 & B^3 & -B^2 \\ -E^2/c & -B^3 & 0 & B^1 \\ -E^3/c & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14.59}$$

Kirjoitetaan sitten Maxwellin yhtälöt kenttätensorin komponenttien avulla. Määritellään ensin operaattori  $\partial_\alpha$ :  $\partial/\partial x^\alpha = (\partial/\partial x^0, \nabla)$ . Vastaavasti  $\partial^\alpha = \partial/\partial x_\alpha = (\partial/\partial x_0, -\nabla)$ . Indeksien sijoittelu on loogista:  $\partial_\alpha$  muuntuu kuten kovariantti vektori, koska  $\partial/\partial x'^\alpha = (\partial x^\beta/\partial x'^\alpha)\partial/\partial x^\beta$ .

Nyt  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \equiv \mu_0 c^2 \rho$  tulee muotoon

$$\partial_1 F^{01} + \partial_2 F^{02} + \partial_3 F^{03} = \mu_0 c \rho. \tag{14.60}$$

Ampèren ja Maxwellin lain kolme komponenttia ovat puolestaan

$$\begin{aligned}
\partial_0 F^{10} + \partial_2 F^{12} + \partial_3 F^{13} &= \mu_0 j^1 \\
\partial_0 F^{20} + \partial_1 F^{21} + \partial_3 F^{23} &= \mu_0 j^2 \\
\partial_0 F^{30} + \partial_1 F^{31} + \partial_2 F^{32} &= \mu_0 j^3.
\end{aligned} \tag{14.61}$$

Ottamalla käyttöön *nelivirta*  $J = (j^\mu) = (c\rho, \mathbf{J})$  voidaan nämä yhtälöt kirjoittaa muodossa

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu. \tag{14.62}$$

Nelivirta on nelivektori, joten varaustiheys  $\rho$  ja virran tiheys  $\mathbf{J}$  muuntuvat samalla tavalla kuin aika  $t$  ja paikka  $\mathbf{r}$ . Suoraviivainen harjoitustehtävä saattaa homogeeniset yhtälöt ( $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ,  $\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$ ) muotoon

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0. \tag{14.63}$$

Koska Maxwellin yhtälöt voidaan kirjoittaa tensoriyhtälöinä (14.62, 14.63), ne säilyttävät muotonsa Lorentzin muunnoksissa. Näin siis Maxwellin 1860-luvulla kehittämä teoria on osoittautunut ensimmäiseksi suppeamman suhteellisuusteorian kanssa sopuinnussa olevaksi fysiikan kuvailuksi.

**HT:** Totea toisen kertaluvun tensoreiden muunnoskaavojen avulla, että suure  $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$  on invariantti Lorentzin muunnoksessa. Lausu sitten tämä suure kenttien avulla.

## 14.5 Kenttien muunnokset

Elektrodynamiikan Lorentz-kovarianssi tarkoittaa siis sitä, että Maxwellin yhtälöt ovat samat inertiaalikoordinaatistosta riippumatta. Tämän voi sanoa sitenkin, että tekemällä elektrodynamiikan alan kokeita, ei saa selville omaa liiketilaansa. Sitä vastoin sähkö- ja magneettikentät riippuvat havaitsijan liiketilasta. Muunnosten täytyy olla sellaiset, että sijoitettaessa muunnetut kentät Maxwellin yhtälöihin tuloksena ovat alkuperäiset yhtälöt. Kaikki tämä on jo edellä esitetyn formalismin sisällä, mutta johdetaan tässä vielä kenttien muunnoskaavat.

Valitaan koordinaattiakselit siten, että koordinaatistojen välinen suhteellinen nopeus  $\mathbf{v}$  on  $x$ -akselin suuntainen. Muunnosmatriisi on tällöin

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14.64)$$

Muuntumaton sähkökentän 1-komponentti on  $F^{01} = E^1/c$ , mikä nähdään laskemalla  $F'^{01}$ :

$$\begin{aligned} F'^{01} &= \Lambda^0{}_\mu \Lambda^1{}_\nu F^{\mu\nu} \\ &= \Lambda^0{}_0 \Lambda^1{}_0 F^{00} + \Lambda^0{}_0 \Lambda^1{}_1 F^{01} + \Lambda^0{}_1 \Lambda^1{}_0 F^{10} + \Lambda^0{}_1 \Lambda^1{}_1 F^{11} \\ &= \gamma^2 \frac{1}{c} E^1 + \beta^2 \gamma^2 \left(-\frac{1}{c} E^1\right) \Rightarrow E'^1 = E^1. \end{aligned} \quad (14.65)$$

Siis puskun suuntainen sähkökenttä säilyy ennallaan. Lasketaan seuraavaksi  $F'^{02} = E^2/c$ :n muunnos:

$$\begin{aligned} F'^{02} &= \Lambda^0{}_\mu \Lambda^2{}_\nu F^{\mu\nu} = \Lambda^0{}_0 \Lambda^2{}_0 F^{02} + \Lambda^0{}_0 \Lambda^2{}_2 F^{02} + \Lambda^0{}_1 \Lambda^2{}_2 F^{12} \\ &= \gamma \frac{1}{c} E^2 - \beta \gamma B^3 \Rightarrow E'^2 = \gamma E^2 - \gamma v B^3. \end{aligned} \quad (14.66)$$

Vastaavat laskut komponentille  $E^3$  ja magneettikentän komponenteille antavat muunnoskaavat eli lausekkeet muunnetuille kentille muunnetussa ne-liavaruuden pisteessä

$$\mathbf{E}'_{\parallel}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}, t) \quad ; \quad \mathbf{E}'_{\perp}(\mathbf{r}', t') = \gamma(\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \quad (14.67)$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{B}_{\parallel}(\mathbf{r}, t) \quad ; \quad \mathbf{B}'_{\perp}(\mathbf{r}', t') = \gamma(\mathbf{B}_{\perp}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)),$$

missä  $\parallel$  ja  $\perp$  viittaavat  $\mathbf{v}$ :n suuntaisiin ja sitä vastaan kohtisuoriin komponentteihin.

**Esimerkki. Liikkuvan varauksen kenttä**

Käsitellään kappaleen 13.2.1 esimerkki suhteellisuusteorian keinoin. Pisteva-  
raus liikkuu nopeudella  $v$   $x$ -akselia pitkin pilkuttomassa tarkkailijan koor-  
dinaatistossa, jossa kentät halutaan määrittää. Olkoon pilkullinen koordi-  
naatisto sellainen, että se liikkuu varauksen mukana ja sen origo olkoon  
varauksen kohdalla. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathbf{B}' &= 0 \\ \mathbf{E}' &= \frac{q\mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0(r')^3}.\end{aligned}\quad (14.68)$$

Käytetään edellä johdettuja muunnoskaavoja (käänteisesti!):

$$\begin{aligned}E_x = E_{\parallel} = E'_x &= \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0(r')^3} \\ \mathbf{E}_{\perp} = \gamma\mathbf{E}'_{\perp} &= \frac{\gamma q\mathbf{r}'_{\perp}}{4\pi\epsilon_0(r')^3}.\end{aligned}\quad (14.69)$$

Vektorin  $\mathbf{r}'$  komponentit ovat

$$\mathbf{r}' = (\gamma(x - vt), y, z). \quad (14.70)$$

Otetaan käyttöön merkintä

$$\gamma\mathbf{R}^* = (\gamma(x - vt), y, z), \quad (14.71)$$

jolloin sähkökentän komponentit ovat

$$\begin{aligned}E_x &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(x - vt)}{\gamma^3(R^*)^3} \\ E_y &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma y}{\gamma^3(R^*)^3} \\ E_z &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma z}{\gamma^3(R^*)^3}\end{aligned}\quad (14.72)$$

eli koottuna vektoriksi

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{(R^*)^3} (1 - \beta^2), \quad (14.73)$$

missä  $\mathbf{R} = (x - vt, y, z)$ . Tämä on kappaleesta 13.2.1 tuttu tulos.

Magneettikentäksi tulee puolestaan

$$\begin{aligned}B_x &= B_{\parallel} = 0 \\ \mathbf{B}_{\perp} &= \gamma \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}' = \gamma \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp}\end{aligned}\quad (14.74)$$

eli

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (14.75)$$

Tuttua tämäkin.

## 14.6 Potentiaalien muunnokset

Homogeeniset Maxwellin yhtälöt ovat kappaleessa 14.4 opitun mukaan

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0. \quad (14.76)$$

Nämä yhtälöt ovat välttämättömiä ja riittäviä ehtoja sille, että on olemassa *nelipotentiaali*  $A_\mu$ , jolle

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu. \quad (14.77)$$

Suoralla laskulla nähdään, että näin esitetty  $F_{\mu\nu}$  toteuttaa homogeeniset Maxwellin yhtälöt eli välttämättömyysehto on voimassa. Riittävyysyhdon todistaminen sivuutetaan (ks. CL).

Nostamalla indeksit saadaan

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu. \quad (14.78)$$

Muistamalla kenttätensorin määritelmä ja kenttien esitys potentiaalien avulla saadaan nelipotentiaali

$$(A^\mu) = (\varphi/c, \mathbf{A}), \quad (14.79)$$

joka toteuttaa aaltoyhtälön

$$\partial_\gamma \partial^\gamma A^\nu - \partial^\nu (\partial_\alpha A^\alpha) = \mu_0 j^\nu. \quad (14.80)$$

Valitsemalla Lorenzin mittaehto ( $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ ) tämä palautuu tutuksi aaltoyhtälöksi.

Todetaan lopuksi, että nelipotentiaali yleensä ajatellaan nelivektoriksi. Tämä on oikeutettua, vaikkakaan ei välttämätöntä. Voidaan osoittaa, että nelipotentiaali muuntuu mittamuunnosta vaille nelivektorina (ks. CL).

## 14.7 Säilymislait

Luvussa 9 esitettiin energian, liikemäärän ja impulssimomentin säilymislait kolmiavaruuden Maxwellin jännitystensorin avulla. Esitetään nämä säilymislait nyt kovariantissa muodossa.

Lorentzin voimatiheys on

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (14.81)$$

Olkoon  $\mathbf{f} = (f^1, f^2, f^3)$ . Tällöin

$$\begin{aligned} f^1 &= \rho E^1 + j^2 B^3 - j^3 B^2 \\ &= c\rho F^{01} + j^2 F^{12} - j^3 F^{31} \\ &= j_0 F^{01} - j_2 F^{12} + j_3 F^{31} \\ &= j_0 F^{01} + j_2 F^{21} + j_3 F^{31}, \end{aligned} \quad (14.82)$$

sillä  $(j^0, j^1, j^2, j^3) = (j_0, -j_1, -j_2, -j_3)$ . Koska  $F^{\alpha\alpha} = 0$ , niin

$$f^i = j_\alpha F^{\alpha i}. \quad (14.83)$$

Lorentzin voimatiheys on siis nelivektorin  $f^\mu = j_\alpha F^{\alpha\mu}$  avaruusosa. 0-komponentti on puolestaan

$$f^0 = j_\alpha F^{\alpha 0} = -F^{0\alpha} j_\alpha = \frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (14.84)$$

eli tehohäviö tilavuusyksikössä. Koska

$$j_\alpha = g_{\alpha\beta} j^\beta = \frac{1}{\mu_0} g_{\alpha\beta} \partial_\nu F^{\beta\nu} = \frac{1}{\mu_0} \partial_\nu F_\alpha{}^\nu, \quad (14.85)$$

voidaan nelivoima kirjoittaa muodossa

$$f^\mu = \frac{1}{\mu_0} (\partial_\nu F_\alpha{}^\nu) F^{\alpha\mu}. \quad (14.86)$$

Määritellään (jälkiviisaasti) symmetrinen tensori ( $T^{\nu\mu}$ )

$$T^{\nu\mu} = \frac{1}{\mu_0} [F_\alpha{}^\nu F^{\alpha\mu} - \frac{1}{4} g^{\nu\mu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}] = T^{\mu\nu}. \quad (14.87)$$

Nyt pieni indeksijumppa antaa tuloksen

$$\partial_\nu T^{\nu\mu} = \frac{1}{\mu_0} (\partial_\nu F_\alpha{}^\nu) F^{\alpha\mu} = f^\mu. \quad (14.88)$$

( $T^{\mu\nu}$ ) on siis sellainen tensori, jonka divergenssi antaa Lorentzin nelivoimatiheyden. Tensori on Maxwellin jännitystensorin yleistys neliavaruudessa. Tämän toteamiseksi lasketaan tensorin komponentit. Tensorin määritelmässä on mukana invariantti  $-(1/4)F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = (1/2)((E/c)^2 - B^2)$ , joka tulee mukaan diagonaaliin termeihin. Nyt

$$T^{00} = \frac{1}{\mu_0} \left[ F_\alpha{}^0 F^{\alpha 0} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c^2} E^2 - B^2 \right) \right] = - \left( \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \quad (14.89)$$

eli kentän energiatiheys  $w_{em} = -T^{00}$ .

$$T^{0i} = \frac{1}{\mu_0} F_\alpha{}^0 F^{\alpha i} = \dots (HT) \dots = -\frac{1}{c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i = -\frac{1}{c} S^i \quad (14.90)$$

ovat puolestaan Poyntingin vektorin komponentit. Pelkästään avaruusosia sisältävät komponentit ovat

$$\begin{aligned}
 T^{kl} &= \frac{1}{\mu_0} \left[ F_\alpha{}^k F^{\alpha l} + g^{kl} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c^2} E^2 - B^2 \right) \right] \\
 &= \epsilon_0 E^k E^l + g^{kl} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{1}{\mu_0} B^k B^l + g^{kl} \frac{B^2}{2\mu_0} \\
 &= T_e^{kl} + T_m^{kl}
 \end{aligned} \tag{14.91}$$

eli luvussa 9 johdetun Maxwellin jännitystensorin  $\mathcal{T}$  sähköiset ja magneettiset komponentit. Tensori  $(T^{\alpha\beta})$  on Maxwellin jännistystensorin laajennus, koska sen  $0\alpha$ -komponentit antavat suoraan sekä sähkömagneettisen energiatihedden että Poyntingin vektorin.

Tuloksista  $f^\mu = j_\alpha F^{\alpha\mu}$  ja  $f^\mu = \partial_\beta T^{\beta\mu}$  saadaan yhtälö

$$\partial_\beta T^{\beta\mu} = j_\alpha F^{\alpha\mu}. \tag{14.92}$$

Tämän nollass komponentti  $\partial_\beta T^{\beta 0} = j_\alpha F^{\alpha 0}$  antaa

$$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \tag{14.93}$$

eli differentiaalisen energian säilymislain (Poyntingin teoreeman). Avaruuskomponentit  $\partial_\beta T^{\beta i} = j_\alpha F^{\alpha i}$  puolestaan antavat liikemäärän säilymislain

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B})^l + \partial_k (T_e^{kl} + T_m^{kl}) = \rho E^l + (\mathbf{J} \times \mathbf{B})^l. \tag{14.94}$$

Olemme siis onnistuneet kirjoittamaan olennaisesti koko klassisen elektrodynamiikan kovariantissa muodossa, kun väliaineeksi oletetaan tyhjiö.

Luvussa 13 käsitelty liikkuvan varauksen säteily voidaan esittää hieman tyylikkäämmin tässä luvussa käsitellyssä formalismissa. Asiasta kiinnostuneita kehoitetaan tutustumaan CL:n lukuun 13 tai Jacksonin säteilyteoriaa käsitteleviin lukuihin.