

Luku 13

Liikkuvan varauksen kenttä

Tässä luvussa tutustutaan liikkuvan varauksen aiheuttamaan sähkömagneettiseen kenttään. Jokaisen itseään kunnioittavan sähködynaamikon on laskettava ainakin kerran elämässään Liénardin ja Wiechertin potentiaalit ja niistä saatavat sähkö- ja magneettikentät. Laskutehtävä on luultavasti tämän kurssin vaativin.

13.1 Liénardin ja Wiechertin potentiaalit

Tarkastellaan yksittäistä pistemäistä varauksellista hiukkasta, jonka rata on $\mathbf{r} = \mathbf{r}_q(t)$. Varaus q on siis ajanhetkellä t pisteessä \mathbf{r}_q ja sen nopeus on $\dot{\mathbf{r}}_q$. Varaus- ja virrantiheys ovat tällöin

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t)) \quad (13.1)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = q\dot{\mathbf{r}}_q(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t)). \quad (13.2)$$

δ -funktiot lausekkeissa merkitsevät sitä, että varaus- ja virrantiheys ovat nollija kaikkialla muualla kuin varauksen kulloisessakin paikassa. Integroitaessa koko avaruuden yli saadaan varaukseksi q ja sähkövirraksi \dot{q} .

Käyttökelpoisten potentiaalien laskeminen ei ole aivan helppo tehtävä. RMC:n luvussa 21 on esitetty eräs suoraviivainen laskumenetelmä, tosin hypäten itse laskun yli. Hahmotellaan tässä puolestaan Greenin funktioiden käyttöön perustuva menetelmä (yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi).

Tehtävänä on ratkaista epähomogeeniset aaltoyhtälöt

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi = -\rho/\epsilon_0 \quad (13.3)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}, \quad (13.4)$$

joissa lähde-termiit ovat edellä annettujen lausekkeiden mukaiset. Kuten luvussa 9 todettiin, ratkaisut ovat Greenin funktion avulla lausuttuina

$$\psi^\pm(\mathbf{r}, t) = \int \int G^\pm(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t') dV' dt', \quad (13.5)$$

missä $\psi^\pm(\mathbf{r}, t)$ ovat viivästyneet (+) ja edistyneet (-) skalaaripotentialit tai vektoripotentialin karteesiset komponentit. Funktio $f(\mathbf{r}', t')$ vastaa lähde-termejä $(\rho/\epsilon_0, \mu_0 \mathbf{J})$. Pilkullinen paikkakoordinaatti \mathbf{r}' on lähde-termin paikkamuuttuja ja pilkullinen aika viivästetty aika $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$. Nyt riittää käyttää viivästyneen potentialin Greenin funktiota:

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t' - (t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (13.6)$$

Tekijä $1/4\pi$ on tässä otettu Greenin funktion määritelmään, kun se luvussa 9 oli G :n aaltoyhtälössä.

Ensin integroidaan paikkaintegraalit, jolloin lähde-termien $\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_q(t'))$ ovat suureksi avuksi. Sen jälkeen aikaintegraalia laskettaessa käytetään hyväksi matemaattista apuneuvoa

$$\int f(x) \delta(g(x)) dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}, \quad (13.7)$$

missä $g(x_i) = 0$. Tässä summataan siis deltafunktion argumentin nollakoh-tien yli. Lopputuloksena saadaan *Liénardin ja Wiechertin potentiaalit*:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})R} \right]_{ret} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right]_{ret} \quad (13.8)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{\boldsymbol{\beta}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})R} \right]_{ret} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{\boldsymbol{\beta}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right]_{ret}, \quad (13.9)$$

missä $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_q$, $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ ja $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c = \dot{\mathbf{r}}_q/c$. Alaindeksi *ret* viittaa lausekkeen laskemiseen viivästyneellä ajalla t' eli

$$[\boldsymbol{\beta}]_{ret} = \dot{\mathbf{r}}_q(t')/c; [\mathbf{R}]_{ret} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t').$$

Viivästynyt aika on puolestaan ratkaistava ehdosta

$$t' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')|/c = t. \quad (13.10)$$

Havaittaja siis mittaa kentän pisteessä \mathbf{r} hetkellä t .

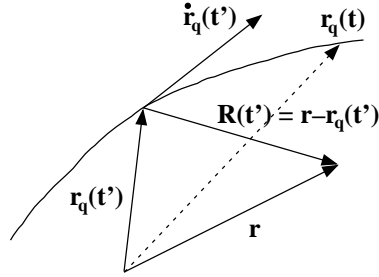
Ehkä kaikkein eleganteinta, joskaan ei sen helpompaa, on tehdä ylläoleva lasku relativistisessa formalismissa, missä φ ja \mathbf{A} ovat nelipotentialin A^α komponentit ja

$$A^\alpha(x) = \int G(x - x') J^\alpha(x') d^4 x' \quad (13.11)$$

(ks. Jackson tai CL:n luku 13.3).

13.2 Kenttien laskeminen

Kun potentiaalit tunnetaan, kentät saadaan derivoimalla, mikä on suoraviivaista, mutta vaatii vähän kärsivällisyyttä. Hankaluutta aiheuttaa viivästyneen ajan implisiittisesti määrittelevä yhtälö (13.10). Aluksi kannattaa selvittää itselleen koordinaatisto (kuva 13.1).



Kuva 13.1: Varauksellisen hiukkasen liiketila hetkellä t' määrää kentän myöhempanä hetkenä t . Kenttä etenee pisteestä $\mathbf{r}_q(t')$ havaintopisteeseen \mathbf{r} ajassa $R(t)/c$, jolloin hiukkanen on ehtinyt radallaan pisteeseen $\mathbf{r}_q(t)$.

Sähkökenttä saadaan lausekkeesta

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\nabla(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})}{(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^2} \right] - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\boldsymbol{\beta}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \right]. \quad (13.12)$$

Hakasulku viittaa lausekkeen laskemiseen viivästetyllä ajalla (jätetään sulut pois laskun välivaiheissa).

Aloitetaan $R(t')$:n gradientin laskemisesta. Kaavan (13.10) perusteella $R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')| = c(t - t')$, joten $\nabla R(t') = -c\nabla t'$. Lasketaan lausekkeen (13.10) molempien puoltien gradientit. ∇t on tietenkin nolla. Vasemman puolen gradientti kannattaa laskea komponentti komponentilta. Itseisarvolauseketta derivoitaessa on on syytä muistaa, että $|f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$. Derivoitaessa termiä $\mathbf{r}_q(t')$ on lisäksi käytettävä ketjusääntöä $\partial/\partial x = (\partial t'/\partial x)(\partial/\partial t')$. Siis

$$\begin{aligned} -c \frac{\partial t'}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')| \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t'))^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')|} 2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q(t')) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} - \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{r}_q(t') \right) \end{aligned}$$

Nyt $\partial \mathbf{r} / \partial x = (1, 0, 0)$ ja $\partial \mathbf{r}_q(t') / \partial t' = \mathbf{v} = c\boldsymbol{\beta}$, joten saadaan

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{x - x_q - c\boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_q)(\partial t' / \partial x)}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}_q|}. \quad (13.13)$$

Tästä seuraa

$$\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{-(x - x_q)}{c(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})}. \quad (13.14)$$

Samoin lasketaan derivaatat y :n ja z :n suhteen ja gradientiksi tulee

$$\nabla t' = -\frac{\mathbf{R}}{c(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})}. \quad (13.15)$$

Näin ollen

$$\nabla R = \frac{\mathbf{R}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}}. \quad (13.16)$$

Tarvitaan myös $\nabla(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})$. Lasketaan taas x -komponentti ja ollaan huolellisia sisäkkäisten funktioiden kanssa kuten edellä:

$$(\nabla(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}))_x = \beta_x + \frac{\partial t'}{\partial x}(\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{R} - \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\mathbf{r}}_q). \quad (13.17)$$

Lasketaan vastaavasti gradientin y - ja z -komponentit, joten

$$\begin{aligned} \nabla(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}) &= \boldsymbol{\beta} + (\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{R} - \boldsymbol{\beta} \cdot \dot{\mathbf{r}}_q)\nabla t' \\ &= \frac{(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})\boldsymbol{\beta} + (\beta^2 - \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{R}/c)\mathbf{R}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}}. \end{aligned} \quad (13.18)$$

Kokoamalla tulokset saadaan skalaaripotentialin gradientiksi

$$\nabla\varphi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{R} - (R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})\boldsymbol{\beta} - (\beta^2 - \dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{R}/c)\mathbf{R}}{(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^3} \right]_{ret}. \quad (13.19)$$

Vektoripotentialia varten täytyy laskea $\partial R/\partial t$. Kaavan (13.10) mukaan $R = c(t - t')$, joten $\partial R/\partial t = c(1 - \partial t'/\partial t)$. Derivoidaan jälleen kaavaa (13.10) puolittain. Nyt $\partial R/\partial t' = -c\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}/R$. Näiden avulla saadaan

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = 1 + \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}}{R} \frac{\partial t'}{\partial t}, \quad (13.20)$$

josta ratkaistaan

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{R}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}}. \quad (13.21)$$

Käyttämällä tätä saadaan

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t'} = -\frac{cR\boldsymbol{\beta}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}}. \quad (13.22)$$

Sähkökentän vektoripotentialiosan lausekkeessa esiintyvä aikaderivaatta on siis

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\boldsymbol{\beta}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \right] = \left[\frac{R(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})\dot{\boldsymbol{\beta}} + (R\dot{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{R} + c\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R} - cR\beta^2)\boldsymbol{\beta}}{(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^3} \right]. \quad (13.23)$$

Sähkökentäksi saadaan lopulta (kirjoitetaan muistin virkistämiseksi alaindeksi *ret* jälleen näkyviin)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(1 - \beta^2)(\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) + \mathbf{R} \times ((\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})/c}{(R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R})^3} \right]_{ret}. \quad (13.24)$$

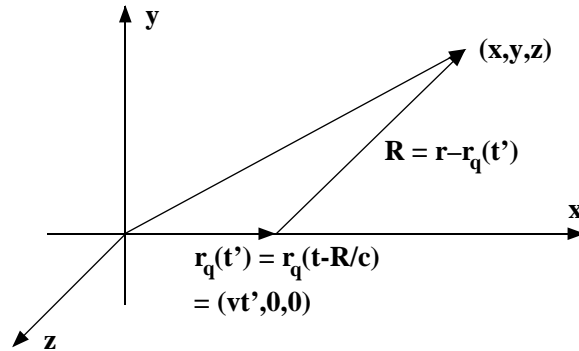
Kuten aiemminkin sähkömagneettisen aallon magneettikenttä saadaan suoraan Faradayn laista, nyt vain on käytettävä viivästettyä yksikkövektoria:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \left[\frac{\mathbf{R}}{R} \right]_{ret} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (13.25)$$

Välittömästi todetaan, että staattisen varauksen ($\boldsymbol{\beta} = 0$) sähkökenttä on Coulombin kenttä. Silloin sähkökenttä on yhdensuuntainen vektorin \mathbf{R} kanssa, joten staattinen varaus ei odotetusti aiheuta magneettikenttää. Vakionopeudella liikkuvan varauksen kenttä on selvästi tekemisissä seuraavassa luvussa tarkasteltavan Lorentzin muunnoksen kanssa. *Säteilykentäksi* kutsutaan kiihtyvyyteen $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ verrannollista termiä, joka pienenee kaukana varauksesta kuten $1/R$ eli yhtä etäisyyden kertalukua hitaammin kuin Coulombin kenttä. Tästä seuraa erityisesti se, että säteilykentän Poyntingin vuo ei mene nolnaan äärettömyydessäkään. Tarkastellaan näitä tilanteita seuraavassa yksityiskohtaisemmin.

13.2.1 Vakionopeudella liikkuvan varauksen kenttä

Tarkastellaan x -akselia pitkin vakionopeudella \mathbf{v} liikkuvan varauksen kenttää (kuva 13.2). Oletetaan, että varaus on ohittanut origon hetkellä $t = 0$. Kenttä pisteessä (x, y, z) lasketaan hetkellä t , jolloin varaus on ehtinyt pisteeseen $(vt, 0, 0)$



Kuva 13.2: Vakionopeudella liikkuvan varauksellisen hiukkasen kentän laskeminen.

Koska $R = \sqrt{(x - vt')^2 + y^2 + z^2} = c(t - t')$, niin viivästynyt aika t' saadaan lausekkeesta

$$(1 - \beta^2)t' = t - \beta x/c - (1/c)\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}. \quad (13.26)$$

Potentiaalien (13.8 ja 13.9) nimittäjissä olevat tekijä $[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]_{ret}$ tulee nyt muotoon

$$[R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}]_{ret} = \sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)} \quad (13.27)$$

ja skalaaripotentiali (13.8) voidaan esittää muodossa

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2}}, \quad (13.28)$$

missä $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Vektoripotentialilla (13.9) on vain x -komponentti, koska $\boldsymbol{\beta} = (\beta, 0, 0)$

$$A_x(x, y, z, t) = \beta\varphi(x, y, z, t)/c. \quad (13.29)$$

Varauksen lepokoordinaatistossa potentiaalilla on tuttu lauseke

$$\varphi(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad (13.30)$$

Liikkuvan varauksen potentiaali saadaan siis (melkein) koordinaattimuunnoksella, jossa y ja z pysyvät ennallaan ja x :stä tulee $\gamma(x - vt)$. Vielä jää mietittäväksi, mistä tekijä γ ilmestyy kertomaan potentiaalia. Lisäksi täytyy selvittää, mistä vektoripotentiali saadaan, kun se on nolla lepokoordinaatistossa. Tähän palataan suhteellisuusteoriassa, jossa \mathbf{A} ja φ muodostavat yhdessä nelivektorin.

Kentät saadaan derivoimalla (tällä kertaa helposti). Sähkökentän komponentit saadaan lausekkeen (13.28) gradientista:

$$E_x(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma(x - vt)}{(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (13.31)$$

$$E_y(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma y}{(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (13.32)$$

$$E_z(x, y, z, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma z}{(\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (13.33)$$

Koska vektoripotentialilla on vain x -komponentti, myös magneettikentän laskeminen on helppoa:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (A\mathbf{e}_x) = -\mathbf{e}_x \times \nabla A \\ &= -(\mathbf{e}_x \times \nabla\varphi) \frac{\beta}{c} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{c} \times \mathbf{E} \\ &= \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{E}}{c^2}. \end{aligned} \quad (13.34)$$

Nämä lausekkeet pätevät kaikilla nopeuksilla. Kaukana varauksesta kenttä heikkenee kääntäen verrannollisesti etäisyyden neliöön. Suurellakaan vakionopeudella liikkuva hiukkanen ei siis säteile.

Kenttää on mukavinta tarkastella varauksen kulloisenkin paikan suhteen. Kohtisuorassa suunnassa ($x - vt = 0$) sähkökentän voimakkuus on

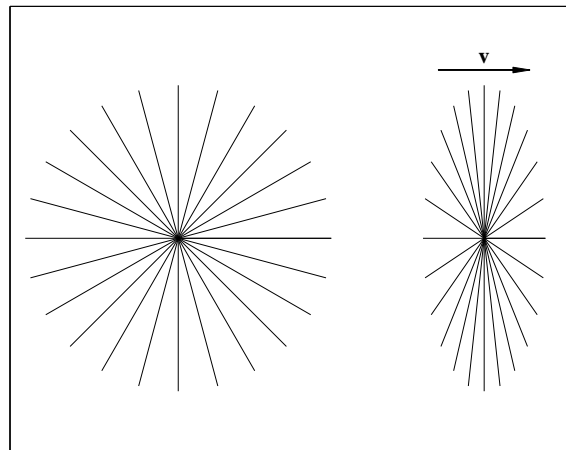
$$E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{y^2 + z^2}. \quad (13.35)$$

Tämä on Coulombin kenttä tekijällä γ suurennettuna ($\gamma \geq 1$ aina). Varauksen edessä ja takana $y = z = 0$ ja

$$E = E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\gamma^2(x - vt)^2}. \quad (13.36)$$

Tämä on puolestaan Coulombin kenttä tekijällä $1/\gamma^2$ pienennettynä.

Kenttäviivat saadaan piirtämällä ensin staattisen varauksen kenttäviivat ja sitten liikuttamalla kuviota suurella nopeudella silmien ohi, jolloin havaitaan Lorentz-kontraktio (ei onnistu kotiooloissa kovin helposti). Vaihtoehtoisesti puristetaan x -akselia kasaan tekijän γ verran (kuva 13.3). Kannattaa kuitenkin muistaa, että kenttäviivat eivät ole todellisia fysikaalisia olioita. Magneettikentän hahmottaminen jää lukijan mietittäväksi samoin kuin hitaasti liikkuvan varauksen magneettikentän osoittaminen samaksi kuin luvussa 5.



Kuva 13.3: Vakionopeudella liikkuvan varauksellisen hiukkasen sähkökentän kenttäviivat. Vasemmalla staattinen varaus, oikealla liikkuva varaus.

Tässä vaiheessa on jouduttu tekemisiin suppeassa suhteellisuusteoriassa niin tärkeän *Lorentzin tekijän* $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ kanssa. On syytä huomata, että tähän mennessä ei ole tehty mitään suhteellisuusteorian oletuksia,

esimerkiksi asetettu valonnopeutta hiukkasten nopeuden ylärajaksi, vaan kaikki on suoraa seurausta pyrkimyksestä laskea tasaisella nopeudella liikkuvan varauksen kentät, jotka toteuttavat Maxwellin yhtälöt. Nyt γ muuttuu imaginaariseksi, jos $v > c$ eli $\beta > 1$, joten nämä tarkastelut johtavat ilmeisen epäfysikaalisiin tuloksiin, jos hiukkasen nopeus ylittää valonnopeuden. Tämän kaltaisiin lausekkeisiin päätyivät George FitzGerald (v. 1889) ja H. A. Lorentz (v. 1892) elektroniteorioissaan. Heillä oli itse asiassa kultainen tilaisuus keksiä suppeampi suhteellisuusteoria, mutta asian oivalsi kuitenkin vasta Albert Einstein vuonna 1905.

13.2.2 Kiihtyvässä liikkeessä olevan varauksen kenttä

Tarkastellaan aluksi epärelativistista rajaa ($\beta \ll 1$), jolloin $1/R$ -säteilykentiksi tulee

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{v}})/R \quad (13.37)$$

$$\mathbf{B}_{rad}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{R}}{R} \times \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{n}/R, \quad (13.38)$$

missä $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$. Näistä saadaan Poyntingin vektoriksi:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_{rad} \times \mathbf{B}_{rad} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \frac{|\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{v}}|^2}{R^5} \mathbf{R}. \quad (13.39)$$

Tämä vaimenee etäisyyden funktiona kuten $1/R^2$, joten Poyntingin vuo ei $1/R$ -säteilykentillä mene nollassi kaukanakaan varauksesta, koska pintaelementti kasvaa vastaavasti kuten R^2 .

Säteilyteho on $P = \int SR^2 d\Omega$, missä $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$. Säteilyteho avaruuskulmaan $d\Omega$ on siten

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \sin^2\theta. \quad (13.40)$$

missä θ on $\dot{\mathbf{v}}$:n ja \mathbf{n} :n välinen kulma. Laskemalla kulmaintegraalit ($8\pi/3$) saadaan *Larmorin kaava*:

$$P = \frac{q^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (13.41)$$

On oleellista ymmärtää, mistä verrannollisuus tekijään $(q\dot{\mathbf{v}})^2$ on peräisin.

Relativistisille hiukkasille t :n ja t' :n välinen ero on tärkeä. Aikavälillä $t_1 = t'_1 + R(t'_1)/c \cdots t_2 = t'_2 + R(t'_2)/c$ avaruuskulmaan $d\Omega$ säteily energia pinta-alayksikköä kohti on

$$\int_{t_1}^{t_2} [\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}]_{ret} dt = \int_{t'_1}^{t'_2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \frac{dt}{dt'} dt'. \quad (13.42)$$

On siis mielekästä määritellä hiukkasen säteilyn intensiteetti $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dt/dt' = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})$ sen omassa ajassa ja omassa paikassa, jolloin

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = R^2(\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \frac{dt}{dt'} = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \frac{|\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5}. \quad (13.43)$$

Kun $\beta \rightarrow 1$ eli hiukkasen nopeus lähenee valonnopeutta, niin $dP/d\Omega$:n nimittäjän merkitys kasvaa ja säteilykeila alkaa venyä hiukkasen liikkeen suuntaan. Maksimi-intensiteetti saavutetaan, kun $\theta_{max} \rightarrow 1/(2\gamma)$ ja keilan leveys on $\approx 1/\gamma$. Koska laskuissa ei ole tehty oletuksia kiihtyvyyden suunnasta, saadut kaavat kuvaavat sekä jarrutussäteilyä että syklotroni- ja synkrotronisäteilyä. Säteilyn kokonaisteho saadaan integroimalla kulmien yli (mikä ei ole aivan helppo lasku) tai tekemällä Larmorin kaavalle Lorentzin muunnos (jos osataan suhteellisuusteoriaa). Lopputulos on

$$P = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c} \gamma^6 (\dot{\boldsymbol{\beta}}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2). \quad (13.44)$$

Pienillä nopeuksilla tämä palautuu odotetusti epärelativistiseen tulokseen.

13.3 Säteilyn spektri¹

Säteilytehon lisäksi usein halutaan tietää säteilyn *taajuusspektri*. Spektriä on järkevää tarkastella havaitsijan näkökulmasta. Merkitään

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = |\mathbf{G}(t)|^2. \quad (13.45)$$

Avaruuskulmaan $d\Omega$ säteilty kokonaisenergia on

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{G}(t)|^2 dt. \quad (13.46)$$

\mathbf{G} :n Fourier-muunnos on

$$\hat{\mathbf{G}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(t) \exp(i\omega t) dt \quad (13.47)$$

ja FYMM I:stä tuttu Parsevalin kaava antaa

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\mathbf{G}}(\omega)|^2 d\omega, \quad (13.48)$$

¹Luvun loppu tästä eteenpäin ei ole kurssin ydinmateriaalia. Esitettävät peruskäsitteet ovat kuitenkin hyödyllisiä myöhemmin säteilyasioiden kanssa tekemisiin joutuville fyysikoille

kun t ja $\mathbf{G}(t)$ ovat reaalisia. Negatiiviset taajuudet voidaan eliminoida kaavalla $\widehat{\mathbf{G}}(-\omega) = \widehat{\mathbf{G}}^*(\omega)$.

Määritellään *energiaspektri* avaruuskulma-alkiota kohti $d^2W/(d\Omega d\omega)$. Tämä kertoo, kuinka paljon energiaa säteilee kulma-alkioon $d\Omega$ taajuuksivälillä $d\omega$. Niinpä

$$\frac{dW}{d\Omega} = \int_0^\infty \frac{d^2W}{d\Omega d\omega} d\omega \quad (13.49)$$

\Rightarrow

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = |\widehat{\mathbf{G}}(\omega)|^2 + |\widehat{\mathbf{G}}(-\omega)|^2 = 2|\widehat{\mathbf{G}}(\omega)|^2. \quad (13.50)$$

Työläs mutta suoraviivainen lasku antaa (ks. Jackson)

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2}{16\pi^3\epsilon_0 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{n} \times ((\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \exp \left[i\omega \left(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0(t')}{c} \right) \right] dt' \right|^2, \quad (13.51)$$

mikä voidaan osittaisintegroida muotoon

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2\omega^2}{16\pi^3\epsilon_0 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) \exp \left[i\omega \left(t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0(t')}{c} \right) \right] dt' \right|^2. \quad (13.52)$$

Epärelativistisella rajalla

$$\frac{d^2W}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2\omega^2}{16\pi^3\epsilon_0 c^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) \exp(i\omega t) dt \right|^2. \quad (13.53)$$

Integroimalla kaikkien kulmien yli saadaan

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{q^2}{6\pi^2\epsilon_0 c^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{v}} \exp(i\omega t) dt \right|^2. \quad (13.54)$$

Tämä antaa siis varatun hiukkasen säteilemän energian spektrin, kun hiukkasen rata tunnetaan.

13.4 Jarrutussäteily

Tarkastellaan esimerkkinä jarrutussäteilystä elektronin tunkeutumista vapaista elektroneista ja positiivisista ioneista koostuvaan ionisoituneeseen kaasuun eli *plasmaan*. Jätetään mahdollinen taustan magneettikenttä huomiotta, mikä on hyvä approksimaatio muilla kuin varausten magneettikentässä tapahtuvan pyörähdysliikkeen taajuuksilla. Oletetaan, että plasma on niin harvaa, että elektronin liike voidaan olettaa tapahtuvaksi yhden

paikallaan olevan ionin Coulombin kentässä, jolloin elektronin kiihtyvyyden

$$|\dot{\mathbf{v}}| = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 mr^2}. \quad (13.55)$$

Larmorin kaava antaa suoraan yhden elektronin säteilemän tehon:

$$P_e = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 mr^2} \right)^2. \quad (13.56)$$

Todellisessa tilanteessa elektronit tulevat plasmaan jonkinlaisena suihkuna, jonka tiheys olkoon n^- . Lasketaan ensin tämän elektronikaasun säteilyteho yhden ionin kentässä:

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{3} Z^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^3 \frac{n^-}{m^2 c^3} \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{4\pi r^2}{r^4} dr \\ &= \frac{8\pi}{3} Z^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^3 \frac{n^-}{m^2 c^3 r_{min}}. \end{aligned} \quad (13.57)$$

Klassinen elektrodynamiikka ei kerro, kuinka integraalin alaraja pitäisi määrätä. Kvanttimekaniikka on opettanut, että hyvä oletus on käyttää elektronin *de Broglien aallonpituutta*:

$$r_{min} \cong \frac{h}{\langle p \rangle} = \frac{h}{\sqrt{mk_B T}}. \quad (13.58)$$

Ottamalla käyttöön kvanttimekaniikassa tärkeä parametri *hienorakennevakio* $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0 \hbar c) \approx 1/137$ sekä *elektronin klassinen säde*, joka määritellään lausekkeella $r_0 = e^2/(4\pi\epsilon_0 mc^2) \approx 2,82 \times 10^{-15}$ m, voidaan säteilytehon lauseke kirjoittaa muodossa

$$P = \frac{8\pi}{3} Z^2 \alpha r_0^2 mc^2 \sqrt{\frac{k_B T}{m}} n^-. \quad (13.59)$$

Huomioidaan lopuksi jarrutusta aiheuttavien ionien tiheys n^+ , jolloin teho tilavuusyksikössä (tehon tiheys) saa muodon

$$P_{vol} = \frac{8\pi}{3} Z^2 \alpha r_0^2 mc^2 \sqrt{\frac{k_B T}{m}} n^- n^+. \quad (13.60)$$

Vaikka olemmekin tehneet väkivaltaa suorittamalla klassisen tarkastelun kvanttitasan ilmiölle, lopputulos on aika hyvä. Täsmällisempi kvanttimekaaninen lasku tuottaa korjaustekijän, joka on suuruusluokkaa 1,1.

13.5 Syklotroni- ja synkrotronisäteily

Jos magneettikentässä liikkuvalla varauksella on magneettikentän suunnasta poikkeava nopeuskomponentti, Lorentzin voiman magneettinen osa pakottaa varauksen kieppumaan magneettikentän voimaviivan ympäri. Tällaiseen liikkeeseen tutustuaan lähemmin luvussa 15. Kieppuva varaus on kiihtyvässä liikkeessä, vaikkei siihen liitykään varatun hiukkasen kokonaisenergian muutosta. Näin ollen varaus säteilee sähkömagneettista säteilyä. Esimerkkinä säteily-spektrin laskemisesta tarkastellaan tällaista *syklotronisäteilyä*, jota relativistisella rajalla kutsutaan *synkrotronisäteilyksi*.

Aloitetaan epärelativistisen elektronin liikkeestä. Olkoon z -akseli \mathbf{B} :n suuntainen, \mathbf{n} varauksesta havaittajan suuntaan osoittava yksikkövektori ja θ \mathbf{B} :n ja \mathbf{n} :n välinen kulma. Merkitään pyörähdysliikkeen kulmataajuutta ω_0 :lla. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \mathbf{e}_x \sin \theta + \mathbf{e}_z \cos \theta \\ \mathbf{r} &= r_L (\mathbf{e}_x \sin \omega_0 t + \mathbf{e}_y \cos \omega_0 t) \\ \mathbf{v} &= v_\perp (\mathbf{e}_x \cos \omega_0 t - \mathbf{e}_y \sin \omega_0 t) \\ v_\parallel &= 0.\end{aligned}$$

Epärelativistiselle hiukkaselle energian menetys säteilyn myötä yhden pyörähdysperiodin aikana on häviävän pieni, joten sitä ei tarvitse huomioida.

Käyttämällä hyväksi apuneuvoja

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}) = v_\perp (-\mathbf{e}_x \cos \omega_0 t \cos^2 \theta + \mathbf{e}_y \sin \omega_0 t + \mathbf{e}_z \cos \omega_0 t \sin \theta \cos \theta)$$

ja

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \sin \omega_0 t \\ \cos \omega_0 t \end{pmatrix} \exp(-i\omega t) dt = \pi \times \begin{cases} -i\delta(\omega - \omega_0) + i\delta(\omega + \omega_0) \\ \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \end{cases}$$

saadaan kulmaan $d\Omega$ säteilyksi energiaksi

$$\begin{aligned}\frac{d^2 W}{d\Omega d\omega} &= \frac{e^2 \omega_0^2 v_\perp^2}{16\pi \epsilon_0 c^3} |\mathbf{e}_x \cos^2 \theta + \mathbf{e}_y i + \mathbf{e}_z \sin \theta \cos \theta|^2 [\delta(\omega - \omega_0)]^2 \\ &= \frac{e^2 \omega_0^2 v_\perp^2}{16\pi \epsilon_0 c^3} (1 + \cos^2 \theta) [\delta(\omega - \omega_0)]^2.\end{aligned}\quad (13.61)$$

Tässä tekijä δ^2 aiheuttaa hankalan singulariteetin. Se on tullut tavaksi laikaista maton alle ottamalla huomioon, että todellinen säteilytapahtuma kestää äärellisen ajan T ja kirjoittamalla

$$\begin{aligned}[\delta(\omega - \omega_0)]^2 &= \delta(\omega - \omega_0) \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(-i(\omega - \omega_0)t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi} \delta(\omega - \omega_0).\end{aligned}\quad (13.62)$$

Näin saatu energiaspektri jaetaan sitten säteilyajalla T , jolloin avaruuskulma-alkioon $d\Omega$ säteily teho on

$$\frac{d^2P}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2\omega_0^2 v_\perp^2}{32\pi^2\epsilon_0 c^3} (1 + \cos^2\theta) \delta(\omega - \omega_0). \quad (13.63)$$

Jäljellä oleva deltafunktio on tärkeä, koska se kertoo, että säteilyllä on spektriviiva juuri pyörähdystaajuudella. Kokonaistehoa laskettaessa tämä helpottaa integrointia ja lopputulos on

$$P = \frac{e^2\omega_0^2 v_\perp^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}, \quad (13.64)$$

mikä on jälleen Larmorin kaava, kun korvataan $\omega_0 v_\perp \rightarrow dv/dt$. Nyt säteilyteho on kääntäen verrannollinen säteilevän hiukkasen massan neliöön: $P \propto \omega_0^2 \propto 1/m^2$. Elektronit säteilevät siis huomattavasti tehokkaammin kuin ionit.

Ottamalla mukaan relativistiset korjaukset ja varauksen liike pitkin magneettikenttää v_\parallel mutta jättämällä yhä energianhävikki yhden pyörähdysten aikana huomiotta päädytään *tehospektriin*:

$$\begin{aligned} \frac{d^2P}{d\Omega d\omega} &= \frac{e^2\omega^2}{8\pi^2\epsilon_0 c} \delta\left(\frac{l\omega_0}{\gamma} - \omega(1 - \beta_\parallel \cos\theta)\right) \times \\ &\sum_{l=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\cos\theta - \beta_\parallel}{\sin\theta}\right)^2 J_l^2\left(\frac{\omega\beta_\perp}{\omega_0/\gamma} \sin\theta\right) + \beta_\perp^2 J_l'^2\left(\frac{\omega\beta_\perp}{\omega_0/\gamma} \sin\theta\right) \right], \end{aligned} \quad (13.65)$$

missä J_l :t ovat Besselin funktioita. Tämä spektri koostuu taajuuksilla

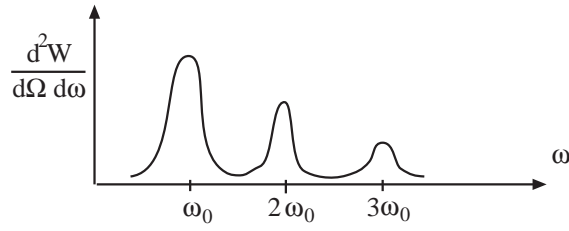
$$\omega_l = \frac{l\omega_0\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta_\parallel \cos\theta}; \quad l = 1, 2, \dots \quad (13.66)$$

olevista piikeistä (kuva 13.4). Ne ovat siirtyneet ω_0 :n monikerroista relativistisen ajan venymisen ($\omega_0 \rightarrow \omega_0/\gamma$) ja Dopplerin siirtymän ($1 - \beta_\parallel \cos\theta$) vuoksi. Integroimalla taajuuksien ja kulmien yli ja summaamalla l :n yli kokonaistehoksi tulee

$$\sum_{l=1}^{\infty} P_l = P^{tot} = \frac{e^2\omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{\beta_\perp^2}{1 - \beta^2}\right). \quad (13.67)$$

Epärelativistisella rajalla ($\beta \ll 1$), mutta olettaen $v_\parallel \neq 0$ voidaan osoittaa, että $P_{l+1}/P_l \sim \beta^2$ suurilla l , joten riittää tarkastella muutamaa ensimmäistä piikkiä. Suurin osa säteilystä tapahtuu perustaajuudella ω_0 . Tämän *syklotroniemiessioviivan* teho on

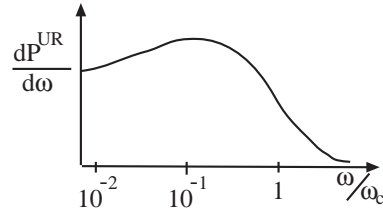
$$\frac{dP}{d\Omega} \approx \frac{e^2\omega_0^2}{32\pi^2\epsilon_0 c} \beta_\perp^2 (1 + \cos^2\theta). \quad (13.68)$$



Kuva 13.4: Syklotronisäteilyn spektriviivat ovat elektronin pyörähdystaajuuden monikertojen kohdalla.

Lasku on tehty yhdelle elektronille. Todellinen syklotronisäteilijä koostuu suuresta joukosta elektroneja. Kertomalla teho säteilylähteen elektronien tiheydellä ja määrittelemällä lämpötila lausekkeella $v_{\perp}^2 = k_B T/m$ nähdään, että syklotroniviivan intensiteetti on verrannollinen elektronien paineeseen.

Rajalla $\beta \rightarrow 1$ viivojen väli $\omega_0(1 - \beta^2) \rightarrow 0$, joten hyvin relativistiset elektronit säteilevät jatkuvaa spektriä, jota kutsutaan *synkrotronisäteilyksi*.



Kuva 13.5: Synkrotronisäteilyn spektri on jatkuva.

Pitkään uskottiin, että kosminen radiosäteily olisi leveäkaistaista elektronien jarrutussäteilyä. 1950-luvun puolivälissä Ginzburg osoitti, että Ravun tähtisumusta tuleva voimakas radiosäteily on juuri synkrotronisäteilyä. Tästä seuraa, että tähtisumun synnyttäneen supernovan jälkeensä jättämällä neutronitähdellä täytyy olla vahva magneettikenttä. Neutronitähtien magneettikentät ovat yleensä alle 10^{10} T suuruusluokkaa. Lisäksi on löytynyt tusinan verran kohteita, joiden kentät ovat välillä $10^{10} - 10^{11}$ T. Näitä kutsutaan magnetaareiksi. Magnetaarien pieni määrä selittyy ainakin osaksi sillä, että suuri magneettikenttä hidastaa niiden pyörimistä. Näin kohteet ovat havaittavissa pulsareina ainoastaan 10^4 vuoden ajan, kun tavanomaiset neutronitähdet "näkyvät" pulsareina noin 1000 kertaa pidemmän ajan.