

Luku 12

Aaltoputket ja resonanssikaviteetit

Tässä luvussa tutustutaan ohjattuun aaltoliikkeeseen. Kerrataan ensin ajasta riippuvan sähkömagneettisen kentän käyttäytyminen ideaalijohteessa ja sen pinnalla.

- Äärettömän hyvän johteen sisällä ei ole sähkökenttää, koska vapaasti liikkuvat varaukset luovat pinnalle sellaisen varauskatteen σ_S , että kokonaiskenttä johteen sisällä on nolla.
- Samoin ajasta riippuva magneettikenttä häviää ideaalijohteen sisällä. Varaukset liikkuvat pinnalla luoden sellaisen pintavirran \mathbf{K} , että kokonaiskenttä on nolla johteessa.
- Muut reunaehdot ovat \mathbf{B} :n normaalikomponentin ja \mathbf{E} :n tangentiaalikomponentin jatkuvuus. Koska \mathbf{B} ja \mathbf{E} ovat nollia ideaalijohteessa, niin aivan johteen ulkopuolella sähkökenttä on kohtisuorassa pintaa vastaan ja magneettikenttä pinnan suuntainen.

Todellisuudessa ideaalijohteita ei ole, mutta malli antaa kuitenkin hyvän peruskäsityksen aaltoputkista. Aalto heijastuu (lähes) häviöttömästi putken reunoilta, joten putken avulla sähkömagneettista aaltokenttää voidaan siirtää lähettimestä haluttuun paikkaan. Yksi käytännön esimerkki aaltoputkesta on optinen kuitu. Rakentamalla johtavista seinistä muodostuva so-pivansuuruinen laatikko aalto voidaan vangita haluttuun tilaan ja syntyy resonanssikaviteetti. Mikroaaltouuni on kaikille tuttu resonanssikaviteetti-laite.

12.1 Sylinteriputki

Tarkastellaan onttoa poikkileikkaukseltaan mielivaltaista metallisylinteriä, jonka seinämät oletetaan ideaalijohteiksi. Sylinterin sisällä aine oletetaan johtamattomaksi (permittiivisyys ϵ_0 , permeabiliteetti μ_0). Kenttien aika-riippuvuus olkoon harmoninen ($e^{-i\omega t}$). Maxwellin yhtälöt sylinterin sisällä ovat

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (12.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (12.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} - i\omega \mathbf{B} = 0 \quad (12.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} + i\omega \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} = 0. \quad (12.4)$$

ja kenttien Helmholtzin yhtälöiksi saadaan

$$(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2})\mathbf{E} = 0 \quad (12.5)$$

$$(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2})\mathbf{B} = 0. \quad (12.6)$$

Valitaan koordinaatisto siten, että z -akseli osoittaa aallon etenemissuuntaan. Sylinterigeometrian vuoksi tehdään yritteet

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y)e^{i(kz - \omega t)}, \quad \mathbf{B}(x, y, z) = \mathbf{B}(x, y)e^{i(kz - \omega t)}. \quad (12.7)$$

z -akselin negatiiviseen suuntaan etenevä aalto e^{-ikz} käsitellään vastaavalla tavalla. On huomattava, että nyt ei enää ole yleisesti $k = \omega/c$. Sijoittamalla yritteet aaltoyhtälöihin saadaan

$$(\nabla_t^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2)\mathbf{E} = 0 \quad (12.8)$$

$$(\nabla_t^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2)\mathbf{B} = 0, \quad (12.9)$$

missä

$$\nabla_t = \nabla - \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla_t^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (12.10)$$

Jaetaan kentät pitkittäiseen ja poikittaiseen osaan, esimerkiksi

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_z + \mathbf{E}_t, \quad (12.11)$$

missä

$$\mathbf{E}_z = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z; \quad \mathbf{E}_t = (\mathbf{e}_z \times \mathbf{E}) \times \mathbf{e}_z \quad (12.12)$$

ja vastavaasti magneettikentälle.

Maxwellin yhtälöt saadaan pienellä manipulaatiolla muotoon

$$\nabla_t \cdot \mathbf{E}_t = -\frac{\partial E_z}{\partial z} = -ikE_z \quad (12.13)$$

$$\nabla_t \cdot \mathbf{B}_t = -\frac{\partial B_z}{\partial z} = -ikB_z \quad (12.14)$$

$$\mathbf{e}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) = i\omega B_z \quad (12.15)$$

$$\nabla_t E_z - \frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z} = \nabla_t E_z - ik\mathbf{E}_t = i\omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_t \quad (12.16)$$

$$\mathbf{e}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{B}_t) = -\frac{i\omega}{c^2} E_z \quad (12.17)$$

$$\nabla_t B_z - \frac{\partial \mathbf{B}_t}{\partial z} = \nabla_t B_z - ik\mathbf{B}_t = -i\frac{\omega}{c^2} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_t. \quad (12.18)$$

Jos B_z ja E_z tunnetaan, voidaan poikittaiset kentät ratkaista. Yhtälöitä (12.13-12.18) ei pidä opetella ulkoa, vaan on ymmärrettävä käsittelyn perusideat.

TEM-moodit

TEM-moodit (transverse electromagnetic modes) ovat sähkömagneettisia aaltoja, joiden kentät ovat kohtisuorassa etenemissuuntaan nähden (siis $B_z = 0$, $E_z = 0$). Tällöin yhtälöistä (12.13-12.18) seuraa $\nabla_t \cdot \mathbf{E}_t = 0$, $\nabla_t \cdot \mathbf{B}_t = 0$, $\nabla_t \times \mathbf{E}_t = 0$, $\nabla_t \times \mathbf{B}_t = 0$ ja kenttien laskeminen palautuu muodollisesti kaksiulotteiseksi statiikan ongelmaksi:

$$\nabla_t^2 \mathbf{E}_t = 0 \quad , \quad \nabla_t^2 \mathbf{B}_t = 0. \quad (12.19)$$

TEM-moodeilla on seuraavanlaisia ominaisuuksia:

1. Aaltoluku k on

$$k = \omega/c = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}. \quad (12.20)$$

2. Kentillä on (12.18):n mukaan samanlainen yhteys kuin tyhjiön tasoallosissa:

$$\mathbf{B}_t = \frac{1}{c} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_t. \quad (12.21)$$

3. TEM-moodi ei voi edetä, jos sylinteri on ontto. Tällöin koko sylinterin sisäseinä on samassa potentiaalissa (voidaan valita $\varphi = 0$) ja sähkökenttä sisällä on täsmälleen nolla. Jos sylinteripintoja on useampia kuten koaksiaalikaapelissa, TEM-moodit voivat edetä, koska pintojen välillä voi olla potentiaaliero.
4. TEM-moodilla ei ole *katkaisutaajuutta* (cut-off frequency) eli taajuutta, jolla aaltoluku häviäisi. Näin ollen $\omega = k/c$ voi olla mitä tahansa.

TM- ja TE-moodit

Tarkastellaan onttoa sylinteriä, jossa ei siis ole TEM-moodeja. Oletetaan nyt, että kentillä on etenemissuuntaiset (z -)komponentit. Kentät voidaan jakaa kahteen toisistaan riippumattomaan moodiin:

1. TM-moodit (transverse magnetic modes):

$$B_z = 0 \text{ kaikkialla}$$

$$E_z = 0 \text{ sylinterin pinnalla.}$$

2. TE-moodit (transverse electric modes):

$$E_z = 0 \text{ kaikkialla}$$

$$\partial B_z / \partial n = \mathbf{n} \cdot \nabla_t B_z = 0 \text{ sylinterin pinnalla.}$$

Huom. Kirjallisuus on moodien nimityksien osalta varsin sekavaa. Jälleen on tärkeää ymmärtää nimenomaan moodien fysikaaliset ominaisuudet, jolloin sopeutuminen erilaiseen nimityssopimukseen on helpompaa.

Tarkastellaan ensin TM-moodeja ja oletetaan z - ja t -riippuvuudet harmonisiksi: $e^{i(kz-\omega t)}$. Lausutaan \mathbf{B}_t ja \mathbf{E}_t E_z :n avulla (vrt. 12.13, 12.16, 12.18):

$$\mathbf{B}_t = \frac{\omega}{kc^2} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_t \quad (12.22)$$

ja

$$\mathbf{E}_t = \frac{ik}{\gamma^2} \nabla_t E_z, \quad (12.23)$$

missä on merkitty

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2. \quad (12.24)$$

E_z ratkaistaan yhtälöstä (12.8):

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2)E_z = 0. \quad (12.25)$$

Samalla tavalla käsitellään TE-moodeja, ja saadaan

$$\mathbf{E}_t = \frac{\omega}{k} \mathbf{B}_t \times \mathbf{e}_z \quad (12.26)$$

$$\mathbf{B}_t = \frac{ik}{\gamma^2} \nabla_t B_z, \quad (12.27)$$

missä B_z toteuttaa yhtälön (12.9):

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2)B_z = 0. \quad (12.28)$$

Suureen γ^2 :n on oltava positiivinen, jotta E_z ja B_z ovat värähteleviä ja reunaehdot voivat toteutua. Yhtälöiden ratkaisuja vastaa joukko ominaisarvoja γ_p , joita puolestaan vastaavat aaltoluvut k_p . Katkaisutajuus saadaan määritelmän mukaan asettamalla k^2 nolllaksi, jolloin

$$\omega_p = c\gamma_p = \gamma_p/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}. \quad (12.29)$$

Aaltoluku on tällöin

$$k_p = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}. \quad (12.30)$$

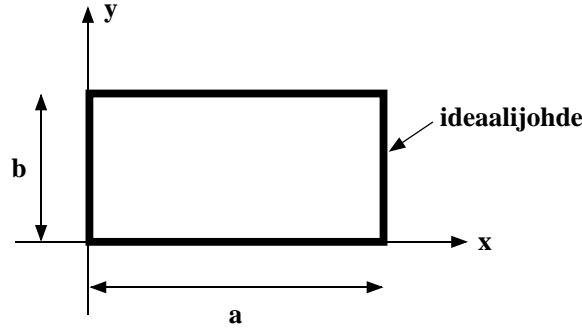
Kun ω lähenee (ylhäältäpäin) katkaisutajuutta, k pienenee eli aalloitus kasvaa suureksi. Jos tajuus on alle katkaisutajuuden, aaltomoodi on eksponentiaalisesti vaimeneva, eikä siis etene.

12.2 Suorakulmainen aaltoputki

Erikoistapauksena tutkitaan suorakulmaisessa aaltoputkessa eteneviä TE-moodeja (kuva 12.1). Ratkaistaan ensin B_z :n Helmholtzin yhtälö

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2\right)B_z = 0 \quad (12.31)$$

reunaehdoin $\partial B_z/\partial n = 0$, kun $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$.



Kuva 12.1: Aaltoputki, jonka poikkileikkaus on suorakaide.

Sähköstatiikan menetelmiä muistellen tehdään separointiyrite $B_z(x, y) = X(x)Y(y)$, jolloin saadaan

$$X'' + p^2X = 0; \quad Y'' + q^2Y = 0, \quad (12.32)$$

missä p^2 on separointivakio ja $q^2 = \gamma^2 - p^2$. Näiden ratkaisut ovat tietenkin funktioiden $\exp(\pm ipx)$ ja $\exp(\pm iqy)$ lineaarikombinaatioita. Magneettikenttä on siten muotoa

$$B_z(x, y) = B_0(e^{ipx} + Ce^{-ipx})(e^{iqy} + De^{-iqy}), \quad (12.33)$$

missä B_0 , C ja D ovat vakioita. Reunaehdot toteutuvat, jos

$$\begin{aligned} C &= D = 1 \\ \sin(pa) = 0 &\Rightarrow p = m\pi/a; \quad m = 0, 1, 2, \dots \\ \sin(qb) = 0 &\Rightarrow q = n\pi/b; \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (12.34)$$

Yhtälön ominaisarvot ovat siis

$$\gamma_{mn}^2 = p^2 + q^2 = \pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2), \quad (12.35)$$

joita vastaavat ratkaisut ovat

$$B_{z,mn}(x, y) = B_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}. \quad (12.36)$$

Katkaisutaajuudet ovat

$$\omega_{mn} = c\gamma_{mn} = \pi c \sqrt{m^2/a^2 + n^2/b^2}. \quad (12.37)$$

Jos $a > b$, niin matalin katkaisutaajuus on $\omega_{10} = \pi c/a$. Tällaista moodia merkitään TE_{10} . Sen B_z -komponentti on

$$B_z = B_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{i(kz - \omega t)} \quad (12.38)$$

ja muut komponentit saadaan yhtälöistä (12.26) ja (12.27):

$$\mathbf{B}_t = -\frac{ika}{\pi} B_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_x \quad (12.39)$$

$$\mathbf{E}_t = \frac{i\omega a}{\pi} B_0 \sin \frac{\pi x}{a} e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_y \quad (12.40)$$

$$k = \sqrt{\omega^2/c^2 - \pi^2/a^2} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_{10}^2}}{c}. \quad (12.41)$$

Vastaavalla tavalla käsitellään z -akselin negatiiviseen suuntaan etenevä aalto (e^{-ikz}).

12.3 Resonanssikaviteetit

Tarkastellaan äärellisen pituisia sylinterimäisiä aaltoputkia (kaviteetteja, onkaloita), joiden päissä on täydellisesti johtavat seinät. Sisällä oleva aine on johtamatonta sähkömagneettisin parametrein μ_0 , ϵ_0 . Resonanssikaviteetti on onkalo, jonka pituus on jonkin aaltoputken moodin aallonpituuden monikerta. Kenttien z -riippuvuus on muotoa $A \sin kz + B \cos kz$ (seisovat aallot eli e^{+ikz} ja e^{-ikz} -aaltojen summa). Jos päädyt ovat tasoilla $z = 0$ ja $z = d$, niin reunaehdot voivat sekä TM- että TE-moodeille toteutua vain, jos $k = \pi p/d$, $p = 0, 1, 2, \dots$. Silloin

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 p^2}{d^2} \quad (12.42)$$

eli jokaisella p ominaisarvoa γ_q vastaa ominaistaaajuus ω_{qp} :

$$\omega_{qp}^2 = c^2 \left(\gamma_q^2 + \frac{\pi^2 p^2}{d^2} \right). \quad (12.43)$$

Ominaisarvot määräytyvät systeemin geometriasta. Aaltoputkien ja resonanssikaviteettien välillä on siis tärkeä ero: Aaltoputkissa taaajuus ω voi saada minkä tahansa katkaisutaaajuutta suuremman arvon. Kaviteetissa taaajuus saa vain diskreettejä arvoja.

TM- ja TE-moodit voidaan käsitellä käyttämällä suoraan aaltoputkille saatuja tuloksia laskemalla sopivasti yhteen e^{+ikz} - ja e^{-ikz} -aaltoja. Esimerkiksi TM-moodilla sähkökentän tangentialikomponentin häviäminen pinoilla $z = 0$ ja $z = d$ vaatii, että

$$E_z = \psi(x, y) \cos \frac{\pi p z}{d}, \quad (12.44)$$

koska silloin

$$\mathbf{E}_t = -\frac{\pi p}{\gamma^2 d} \sin \frac{\pi p z}{d} \nabla_t \psi(x, y). \quad (12.45)$$

Funktio ψ toteuttaa Helmholtzin yhtälön

$$(\nabla_t^2 + \gamma^2) \psi(x, y) = 0. \quad (12.46)$$

Magneettikenttä saadaan lausekkeesta

$$\mathbf{B}_t = \frac{i\omega}{\gamma^2 c^2} \cos \frac{\pi p z}{d} \mathbf{e}_z \times \nabla_t \psi(x, y). \quad (12.47)$$

On hyödyllinen harjoitustehtävä osoittaa, että nämä lausekkeet toteuttavat kaikki Maxwellin yhtälöt. Reunaehdoista seuraa puolestaan lisäehtoja ψ :lle.

Tarkastellaan esimerkkinä ympyräsylinteriä (säde R). TM-moodissa E_z :n on hävittävä sylinterin pystyreunoilla eli sylinterikoordinaateissa $\psi(R, \phi) = 0$. Separointimenetelmällä saadaan fysikaalisesti kelvolliseksi ratkaisuksi

$$\psi(r, \phi) = \psi_{mn}(r, \phi) = A J_m(\gamma_{mn} r) e^{\pm im\phi}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (12.48)$$

missä J_m on Besselin funktio ja $\gamma_{mn} = x_{mn}/R$ ja x_{mn} on yhtälön $J_m(x) = 0$ n :s juuri. Ominaisaajuudet ovat nyt

$$\omega_{mnp}^2 = c^2 \left(\frac{x_{mn}^2}{R^2} + \frac{\pi^2 p^2}{d^2} \right). \quad (12.49)$$

Alin TM-moodi on TM_{010} , jossa $\omega_{010} \approx 2,405c/R$. Tämä on riippumaton sylinterin korkeudesta. Vastaavalla tavalla käsitellään TE-moodit. Niiden ominaisaajuuksissa on aina myös d -riippuvuus, joten taajuuksien säätäminen on helpompaa kuin TM-moodilla.

Mikroaaltouuneista¹

Mikroaallot ovat sähkömagneettista säteilyä aallonpituuksilla 1 mm – 0,3 m (taajuus $10^9 - 3 \cdot 10^{11}$ Hz). Mikroaaltouunin käyttö ruuanvalmistuksessa perustuu siihen, että mikroaallot saavat ruoka-aineiden polaariset molekyylit pyörrähtelemään. Kitkan takia osa pyörrähdysenergiasta muuttuu lämmöksi. Mikroaaltouuneissa käytetään tyypillisesti aallonpituutta 12,2 cm (taajuus 2450 MHz), jolloin saavutetaan hyvä absorptio erityisesti vesimolekyylille. Oleellista on, että ruoka-aineiden pitää sisältää polaarisia molekyylejä. Polaarittomat aineet läpäisevät mikroaaltoja ja metallit taas heijastavat niitä. Tyypillinen tunkeutumissyvyys ruoka-aineissa on muutaman senttimetrin luokkaa. Kypsennys tapahtuu siis suoraan ruuan sisällä, ellei annos ole kovin paksu, jolloin sisäosissa kuumennus tapahtuu johtumalla.

Mikroaaltouunin tärkein osa on luonnollisesti uunitila, jossa ruoka kuumennetaan ja joka on siis resonanssikaviteetti. Mikroaaltokenttä synnytetään magnetronissa, josta kenttä johdetaan aaltoputkea pitkin uuniin. Magnetroni koostuu useasta resonanssiontelosta (sähköisestä värähtelypiiristä). Erillinen uunitila on tarpeen, koska ruoka ei mahdu näihin onteloihin.

Pohdittavaksi: Monissa uunimalleissa on ovesa verkko, jonka läpi näkee uunin sisälle. Näkyvä valo selvästikin kulkee oviverkon läpi, mutta voiko mikroaaltosäteily vuotaa ympäristöön?

¹Arkipäivän elektrodynamiikkaa