

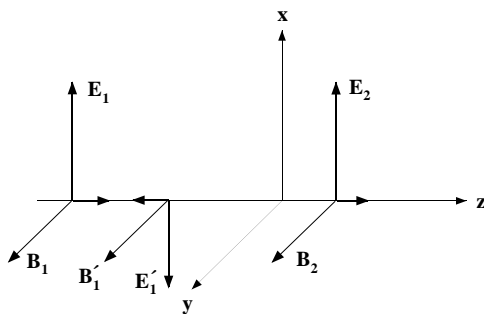
Luku 11

Aaltojen heijastuminen ja taittuminen

Tässä luvussa käsitellään sähkömagneettisten aaltojen heijastumista ja taittumista väliaineiden rajapinnalla. Rajoitutaan monokromaattisiin aaltoihin ja oletetaan väliaineet lineaarisiksi ja magnetoitumattomiksi ($\mu = \mu_0$).

11.1 Kohtisuora saapuminen kahden eristeen rajapinnalle

Tarkastellaan ensin heijastumista kahden eristeen rajapinnalla (xy -taso), kun aalto saapuu kohtisuoraan pintaa vastaan (kuva 11.1). $(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1)$ kuvaa $+z$ -akselin suuntaan etenevää *saapuvaa* aaltoa, $(\mathbf{E}'_1, \mathbf{B}'_1)$ $-z$ -akselin suuntaan etenevää *heijastunutta* aaltoa ja $(\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2)$ rajapinnan *läpäissyttä* aaltoa.



Kuva 11.1: Heijastuminen ja läpäisy kohtisuoraan xy -tasolle saapuvalla aal-
lolle.

Olkoon aallon sähkökenttä on lineaarisesti polarisoitunut x -akselin suuntaan, jolloin

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= \mathbf{e}_x E_{1x} e^{i(k_1 z - \omega t)} \\ \mathbf{E}'_1 &= -\mathbf{e}_x E'_{1x} e^{-i(k_1 z + \omega t)} \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{e}_x E_{2x} e^{i(k_2 z - \omega t)},\end{aligned}\quad (11.1)$$

missä $k_1 = n_1 \omega / c$, $k_2 = n_2 \omega / c$. Magneettikenttä saadaan Faradayn laista seuraavasta relaatiosta $\mathbf{B} = (n/c) \mathbf{u} \times \mathbf{E}$, missä $\mathbf{u} = \mathbf{e}_z$ tulevalle ja läpäisseele aallolle ja $\mathbf{u} = -\mathbf{e}_z$ heijastuneelle aallolle. Kenttä on y -akselin suuntainen:

$$\begin{aligned}c\mathbf{B}_1 &= \mathbf{e}_y n_1 E_{1x} e^{i(k_1 z - \omega t)} \\ c\mathbf{B}'_1 &= \mathbf{e}_y n_1 E'_{1x} e^{-i(k_1 z + \omega t)} \\ c\mathbf{B}_2 &= \mathbf{e}_y n_2 E_{2x} e^{i(k_2 z - \omega t)}.\end{aligned}\quad (11.2)$$

Kaikilla aalloilla on oltava sama ω , jotta reunaehdot toteutuisivat kaikilla ajanhetkillä t . Sähkökentän tangentialikomponentti on jatkuva, joten

$$E_{1x} - E'_{1x} = E_{2x}. \quad (11.3)$$

Tapauksessa ($\mu = \mu_0$) sama pätee magneettikentälle. Jatkuvuusehto on

$$n_1(E_{1x} + E'_{1x}) = n_2 E_{2x}. \quad (11.4)$$

Oletetaan saapuvan aallon amplitudi E_{1x} tunnetuksi ja ratkaistaan heijastuneen ja läpäisseen aallon amplitudit:

$$E'_{1x} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} E_{1x}; \quad E_{2x} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1} E_{1x}. \quad (11.5)$$

Määritellään *Fresnelin kertoimet* kohtisuoraan tulevalle aallolle:

$$r_{12} = \frac{E'_{1x}}{E_{1x}} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}; \quad t_{12} = \frac{E_{2x}}{E_{1x}} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1}. \quad (11.6)$$

r viittaa heijastumiseen (reflection) ja t läpäisyyn (transmission). Aallon *intensiteetti* saadaan Poyntingin vektorista:

$$\langle S \rangle = \frac{n}{2\mu_0 c} (E_p^2 + E_s^2). \quad (11.7)$$

Tässä käsiteltävässä tapauksessa on $E_p = E_x$ ja $E_s = 0$. Määritellään *heijastussuhde* R_n ja *läpäisysuhde* T_n seuraavasti:

$$R_n = \frac{\langle S'_1 \rangle}{\langle S_1 \rangle} = r_{12}^2 = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \quad (11.8)$$

$$T_n = \frac{\langle S_2 \rangle}{\langle S_1 \rangle} = \frac{n_2}{n_1} t_{12}^2 = \frac{4n_2 n_1}{(n_2 + n_1)^2}. \quad (11.9)$$

Mille hyvänsä eristeparille $R_n + T_n = 1$, mikä ilmaisee *energian säilymisen*.

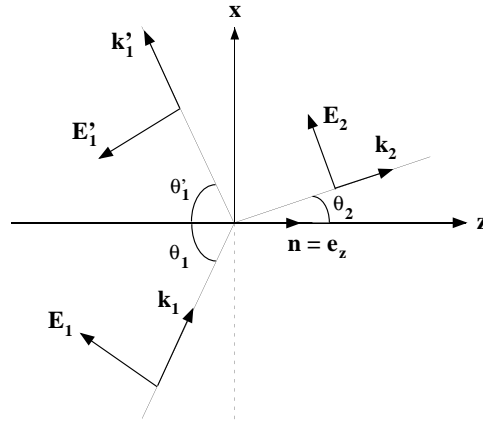
Elliptiselle polarisaatiolle on tarkasteltava erikseen x - ja y -komponentteja. x -komponenteille pätee yllä oleva tarkastelu sellaisenaan ja y -komponenteille tulee samat Fresnelin kertoimet. Myös y -komponentit pysyvät samassa vaiheessa keskenään, vaikka ne ovatkin eri vaiheessa kuin x -komponentit. Heijastus- ja läpäisyysuhteet pysyvät ennallaan, sillä intensiteetti $\langle S \rangle$ on eri polarisaatiokomponenttien intensiteettien summa.

Esimerkkejä

1. Ilman ($n_1 = 1$) ja lasin ($n_2 = 1,5$) rajapinnalla $R_n = 0,04$ ja $T_n = 0,96$.
2. Puhtaan veden taitekerroin näkyvälle valolle on $n_2 = 1,33$, joten $R_n = 0,02$. Kun ω on alle 10^{11} s^{-1} , veden suhteellinen permittiivisyys on kuitenkin suuri ($\epsilon_r \approx 81$), joten $n_2 = 9$ ja $R_n = 0,64$. Vesi siis heijastaa huomattavasti tehokkaammin radioaaltoja kuin valoa.

11.2 Saapuva aalto mielivaltaisessa kulmassa

Tarkastellaan sitten tilannetta, jossa rajapinta on xy -tasossa ja saapuvan aallon aaltovektori xz -tasossa (**saapumistasossa**, kuva 11.2).



Kuva 11.2: Heijastuminen ja taittuminen p -polarisaatiolle.

Valitaan jokaiselle osa-aallolle jälleen $\{\mathbf{p}, \mathbf{s}, \mathbf{u}\}$ -kanta, jolloin kuvan tilanteessa kullakin aallolla on vain sähkökentän p -komponentti:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_1 &= \mathbf{p}_1 \hat{E}_{1p} e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\
 \mathbf{E}'_1 &= \mathbf{p}'_1 \hat{E}'_{1p} e^{i(\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\
 \mathbf{E}_2 &= \mathbf{p}_2 \hat{E}_{2p} e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)}.
 \end{aligned} \tag{11.10}$$

Koska kunkin osa-aallon magneettikenttä on kohtisuorassa sekä \mathbf{k} - että \mathbf{p} -vektoreihin nähden, magneettikentällä on vain s -komponentti ja se on tässä geometriassa kaikilla osa-aalloilla y -akselin suuntainen. Vaikka kuva 11.2 näyttää erikoistapaukselta, kyseessä on toinen kahdesta perustilanteesta.

Olkoon $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ rajapinnan yksikkönormaali. Jotta aaltokenttä olisi jatkuva rajapinnalla, täytyy aaltojen taajuuksien lisäksi myös vaiheiden olla samat missä hyvänsä rajapinnan pisteessä \mathbf{r}_0 , joten

$$\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_0 = \mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r}_0 = \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_0. \quad (11.11)$$

Tästä on helppo näyttää, että

$$\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{k}'_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{k}_2. \quad (11.12)$$

Siis kaikki \mathbf{k} -vektorit ja \mathbf{n} ovat kohtisuorassa vektoria $(\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1)/|\mathbf{n} \times \mathbf{k}_1| = \mathbf{e}_y$ kohtaan, joten kaikkien osa-aaltojen aaltovektorit ovat samassa tasossa.

Muistisääntönä p -komponentti viittaa saapumistasossa olevaan komponenttiin (parallel). Tällaisesta polarisaatiosta käytetään nimitystä *p-polarisaatio*. Radioaaltojen yhteydessä tätä kutsutaan myös *vertikaaliseksi polarisaatioksi*, sillä tarkasteltaessa radioaallon heijastumista ionosfääristä näin polarisoituneen aallon sähkökentällä on pystykomponentti.

Toinen peruspolarisaatio on *s-polarisaatio* tai *horisontaalinen polarisaatio*, jossa sähkökentällä on vain s -komponentti. s viittaa saksankielen sanaan senkrecht (kohtisuora). Tällöin puolestaan osa-aaltojen magneettikentillä on erisuuntaiset p -komponentit. Koska kaikki muut polarisaatiotilat voidaan ilmaista eri vaiheissa värähtelevien s - ja p -polarisoituneiden aaltojen summana, riittää tarkastella näitä kahta perustapausta

Kuvasta (11.2) nähdään kaksi muutakin tärkeää tulosta. Ensinnäkin

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{n} &= k_1 \cos \theta_1 \\ \mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{n} &= -k'_1 \cos \theta'_1 \\ \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{n} &= k_2 \cos \theta_2, \end{aligned} \quad (11.13)$$

joten

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}_1 \times \mathbf{n}| &= k_1 \sin \theta_1 \\ |\mathbf{k}'_1 \times \mathbf{n}| &= k'_1 \sin \theta'_1 \\ |\mathbf{k}_2 \times \mathbf{n}| &= k_2 \sin \theta_2. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Niinpä on oltava

$$k_1 \sin \theta_1 = k'_1 \sin \theta'_1 = k_2 \sin \theta_2. \quad (11.15)$$

Koska saapuva ja heijastunut aalto etenevät samalla taajuudella samassa väliaineessa, $k_1 = k'_1$ ja saadaan tuttu *heijastuslaki*:

$$\sin \theta_1 = \sin \theta'_1 \quad \text{eli} \quad \theta_1 = \theta'_1. \quad (11.16)$$

Aaltolukuja eri väliaineissa puolestaan sitoo dispersioyhtälö $k = n\omega/c$, mistä seuraa *Snellin laki*

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 . \quad (11.17)$$

Heijastuslain ja Snellin lain johtamisessa ei käytetty Maxwellin yhtälöistä seuraavia ehtoja kentille rajapinnalla, vaan ne riippuvat aaltoliikkeen yleisistä geometrisista ominaisuuksista ja Snellin lain osalta väliaineen taitekerroimesta. Fresnelin kertoimia määritettäessä tarvitaan myös kenttien tangentiaalikomponenttien jatkuvuusehtoja. Vektorikenttä voidaan hajottaa normaali- ja tangentiaalikomponentteihin kirjoittamalla $\mathbf{E} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{n} - \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E})$. Normaalikomponenttien jatkuvuusehdot toteutuvat automaattisesti. Tangentiaalikomponentin jatkuvuus tarkoittaa, että

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}'_1) = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 . \quad (11.18)$$

Magneettikentälle puolestaan (kun $\mu = \mu_0$)

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}'_1) = \mathbf{n} \times \mathbf{B}_2 . \quad (11.19)$$

Jos aaltovektorin suuntainen yksikkövektori on \mathbf{u} , niin $\mathbf{B} = (n/c)\mathbf{u} \times \mathbf{E}$, joten magneettikentän jatkuvuus edellyttää, että

$$n_1 \mathbf{n} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{E}_1 + \mathbf{u}'_1 \times \mathbf{E}'_1) = n_2 \mathbf{n} \times (\mathbf{u}_2 \times \mathbf{E}_2) . \quad (11.20)$$

Kirjoittamalla vektorikolmitulot auki ja tarkastelemalla s -komponenttia saadaan osa-aallolle \mathbf{E}_1 yhtälö

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{E}_{1s}) = -\cos \theta_1 \mathbf{E}_{1s} \quad (11.21)$$

ja vastaavasti muille osa-aalloille. Näin (11.20) saadaan muotoon

$$n_1 (\cos \theta_1 \mathbf{E}_{1s} - \cos \theta'_1 \mathbf{E}'_{1s}) = n_2 \cos \theta_2 \mathbf{E}_{2s} . \quad (11.22)$$

Koska $\theta_1 = \theta'_1$, tämä sievenee muotoon

$$n_1 \cos \theta_1 (\mathbf{E}_{1s} - \mathbf{E}'_{1s}) = n_2 \cos \theta_2 \mathbf{E}_{2s} . \quad (11.23)$$

Sähkökentän tangentiaalikomponentin jatkuvuudesta saadaan suoraan s -komponenteille ehto

$$\mathbf{E}_{1s} + \mathbf{E}'_{1s} = \mathbf{E}_{2s} . \quad (11.24)$$

Näistä yhtälöistä saadaan Fresnelin kertoimet s -polarisaatiolle:

$$\mathbf{E}'_{1s} = r_{12s} \mathbf{E}_{1s} , \quad \mathbf{E}_{2s} = t_{12s} \mathbf{E}_{1s} , \quad (11.25)$$

missä

$$r_{12s} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \quad (11.26)$$

$$t_{12s} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} . \quad (11.27)$$

p -polarisaatio näyttää geometrialtaan hankalammalta, koska sähkökenttä ei ole rajapinnan tasossa. Nyt kannattaakin tarkastella magneettikenttää, joka on rajapinnan tasossa. Näin saadaan yhtälöpari

$$\frac{1}{n_1} \cos \theta_1 (\mathbf{B}_{1s} - \mathbf{B}'_{1s}) = \frac{1}{n_2} \cos \theta_2 \mathbf{B}_{2s} \quad (11.28)$$

$$\mathbf{B}_{1s} + \mathbf{B}'_{1s} = \mathbf{B}_{2s} \quad (11.29)$$

ja Fresnelin kertoimet tulevat ehdosta

$$\mathbf{B}'_{1s} = r_{12p} \mathbf{B}_{1s}, \quad \mathbf{B}_{2s} = \frac{n_2}{n_1} t_{12p} \mathbf{B}_{1s}, \quad (11.30)$$

missä

$$r_{12p} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \quad (11.31)$$

$$t_{12p} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}. \quad (11.32)$$

Koska Snellin laki sitoo taitekertoimet saapumis- ja taittumiskulmiin

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - (n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_1}, \quad (11.33)$$

voidaan taittumiskulma eliminoida Fresnelin kertoimista.

Intensiteettien väliset relaatiot saadaan keskimääräisten Poyntingin vektoreiden avulla, mutta nyt täytyy käsitellä s - ja p -polarisaatiot erikseen:

$$R_s = \frac{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}'_{1s} \rangle}{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{1s} \rangle} \quad T_s = \frac{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{2s} \rangle}{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{1s} \rangle} \quad (11.34)$$

$$R_p = \frac{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}'_{1p} \rangle}{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{1p} \rangle} \quad T_p = \frac{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{2p} \rangle}{\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{S}_{1s} \rangle}, \quad (11.35)$$

jotka Fresnelin kertoimien avulla saavat muodon

$$R_s = r_{12s}^2 \quad T_s = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} t_{12s}^2 \quad (11.36)$$

$$R_p = r_{12p}^2 \quad T_p = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} t_{12p}^2 \quad (11.37)$$

ja lisäksi $R_s + T_s = 1$ ja $R_p + T_p = 1$.

Käyttämällä hyväksi Snellin lakia pieni trigonometrinen funktioiden harjoitustehtävä muokkaa Fresnelin kertoimet muotoon

$$r_{12s} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \quad (11.38)$$

$$t_{12s} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} \quad (11.39)$$

$$r_{12p} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \quad (11.40)$$

$$t_{12p} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (11.41)$$

Brewsterin kulma

Millä kulmilla aalto ei lainkaan heijastu rajapinnalta? Molemmilla polarisaatioilla tämä tapahtuu, kun $\theta_1 = \theta_2$, mutta tämä ei ole mielenkiintoinen tapaus, koska silloin molemmilla väliaineilla on oltava sama taitekerroin. p -polarisaation kyseessä ollen myös tapaus $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ tekee heijastuskerroimesta nollan. Taittuneen ja heijastuneen säteen välinen kulma on silloin suora. Merkitään sisääntulokulmaa θ_B ja kirjoitetaan $\theta_2 = \pi/2 - \theta_B$, jolloin Snellin laista saadaan ratkaistuksi *Brewsterin kulma*:

$$\tan \theta_B = n_2/n_1. \quad (11.42)$$

Koska tämä ehto on voimassa vain p -polarisaatiolle (vertikaaliselle polarisaatiolle), sen avulla voidaan tuottaa polarisoitunutta valoa. Esimerkiksi ilman ($n = 1$) ja lasin ($n = 1.5$) rajapinnalla $\theta_B = 56^\circ$ ja tässä kulmassa rajapinnalle tulevasta polarisoitumattomasta (tai mielivaltaisesti polarisoituneesta) valosta heijastuu vain s -polarisoitunut komponentti.

Kokonaisheijastus

Aalto heijastuu kokonaan, jos $\theta_2 = \pi/2$. Sitä vastaava sisääntulokulma saadaan jälleen Snellin laista

$$\sin \theta_c = n_2/n_1. \quad (11.43)$$

Tätä kutsutaan *kriittiseksi kulmaksi*. Se on reaalinen vain, jos $n_2 < n_1$. Tarkastellaan jälleen lasin ja ilman rajapintaa, mutta nyt lasin suunnasta, jolloin $\theta_c = 42^\circ$. Jos kulma on tätä suurempi, Snellin laki antaa ehdon

$$\sin \theta_2 > 1, \quad (11.44)$$

jolla ei ole reaalisia ratkaisuja. Tarkastelemalla kompleksisia Fresnelin kertoimia voidaan näyttää, että $R_s = R_p = 1$ kaikille $\theta_1 \geq \theta_c$. Kriittistä kulmaa suuremmilla saapumiskulmilla kaikki aallon energia heijastuu. Tästä on hyötyä käytännön optiikassa kuten prismakiikareissa ja valokaapeleissa.

11.3 Heijastuminen johteen pinnalta

Edellisessä esimerkissä jouduimme tilanteeseen, jossa Fresnelin kertoimet tulevat kompleksiksi. Näin käy myös, jos toinen väliaine on johtava, koska silloin taitekerroin on kompleksinen. Snellin laki on yhä voimassa, joten

$$n_1 \sin \theta_1 = \hat{n}_2 \sin \hat{\theta}_2 \quad (11.45)$$

missä hattu viittaa kompleksilukuun. Kompleksisuureiden avulla kirjoitettuun esimerkiksi heijastuneen s -polarisaation sähkökentäksi tulee

$$\hat{\mathbf{E}}'_{1s} = |\hat{r}_{12s}| e^{i\alpha_s} \hat{\mathbf{E}}_{1s}. \quad (11.46)$$

Heijastuneella osa-aallolla on täten *vaihe-ero* α saapuneeseen aaltoon nähden. Läpäisseen aallon osalta tilanne on olennaisesti edellisiä monimutkaisempi, koska johteessa aalto *vaimenee* eli sen energiaa siirtyy väliaineelle.

Mikäli johtava väliaine on niin paksu, että se absorboi kaiken rajapinnan läpi tulleen energian, voidaan määritellä *vaimennussuhde* (absorptanssi):

$$A = 1 - R. \quad (11.47)$$

Tarkastellaan tilannetta, jossa aalto tulee ilmasta ($n_1 = 1$) johteeseen ja kirjoitetaan johteen taitekerroin $\hat{n}_2 = n_r + in_i$. Tällöin kohtisuoraan saapuvalla aallolla saadaan vaimennussuhteeksi

$$A_n = \frac{4n_r}{(n_r + 1)^2 + n_i^2}. \quad (11.48)$$

Jos n_r ja n_i ovat molemmat suuria ja suurinpiirtein yhtä suuria, saadaan luvussa 10 käsitelty hyvän johteen tapaus: $\text{Im } k = \sqrt{\mu_0 \sigma \omega} / 2$. Olettaen taajuus reaalisiksi, saadaan

$$n_i = \frac{c}{\omega} \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}}, \quad (11.49)$$

joten vaimennussuhde on

$$A_n \approx 2\sqrt{2\epsilon_0 \omega / \sigma} \ll 1. \quad (11.50)$$

Pieni vaimennussuhde merkitsee hyvää heijastussuhdetta.

Esimerkkejä

1. Mikroaaltotekniikassa käytetään usein hopeapintaa heijastamaan aaltoja. Tyypillisen 3 cm aallon taajuus on $f = 10$ GHz, jolloin

$$A_n = 3,9 \cdot 10^{-4} \quad ; \quad R_n = 0,9996.$$

2. Sukellusveneiden kanssa kommunikoidaan esim. 60 kHz:n taajuisilla radioaalloilla. Meriveden johtavuus on $\sigma = 4,3 \text{ S m}^{-1}$, joten

$$A_n = 2,5 \cdot 10^{-3} \quad ; \quad R_n = 0,9975.$$