

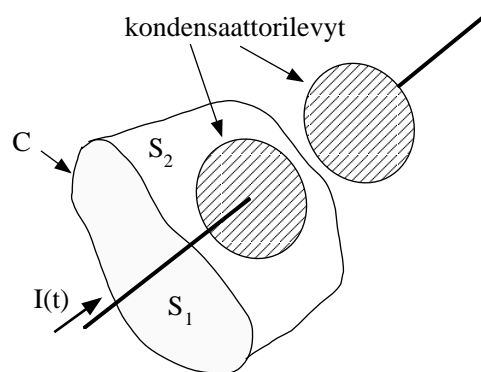
## Luku 9

# Maxwellin yhtälöt

Nyt meillä on pystyssä elektrodynamiikan peruspilarit sellaisina, joina ne tunnettiin 1860-luvun alussa. Maxwell huomasi yhtälöissä piilevän teoreettisen ongelman: Mitä tapahtuu, jos varaustiheys ja siten sähkökenttä muuttuvat ajallisesti? Ampèren laki pätee vain staattiselle systeemille ja ottamalla siitä divergenssi nähdään, että  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ . Varaustiheyden mahdollisesti muuttuessa pitäisi kuitenkin jatkuvuusyhtälön  $\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0$  olla voimassa.

### 9.1 Siirrosvirta

Kuvan 9.1 mukaisessa ajatuskokeessa varataan kondensaattoria sähkövirralla  $I$ .



Kuva 9.1: Ampèren laki varattaessa kondensaattoria. Pinta  $S_1$  on kondensaattorin ulkopuolella, kun taas pinta  $S_2$  kulkee levyjen välistä. Pinnoilla on yhteinen reunakäyrä  $C$ .

Ampèren lain mukaan

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = I, \quad (9.1)$$

missä  $S_1$  on pinta, jonka läpi virta  $I$  kulkee. Nyt kuitenkin mikään ei määrää, missä silmukan  $C$  rajoittaman yhdesti yhtenäisen pinnan tulisi olla. Pinnaksi voidaan valita myös kondensaattorin levyjen välisen alueen kautta piirretty pinta  $S_2$ , joka ei leikkaa virtaa missään. Siinä tapauksessa

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (9.2)$$

Molemmat integraalit ovat matemaattisesti oikein, joten näennäisen ristiriidan täytyy johtua puutteellisesta ymmärryksestä fysiikasta. Ratkaisu on siinä, että virta  $I$  tuo varausta kondensaattorin levyille eikä varaus poistu systeemistä samaan tahtiin. Virralla on siis divergenssiä pintojen  $S_1$  ja  $S_2$  rajaamassa tilavuudessa.

Muotoillaan tämä huomio jatkuvuusyhtälönä

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (9.3)$$

jonka mukaan siis virran divergenssi kompensoituu varaustiheyden muutoksena pintojen  $S_1$  ja  $S_2$  rajaamassa tilavuudessa. Varaustiheys voidaan ilmaista Gaussin lain avulla:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (9.4)$$

joten jatkuvuusyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\nabla \cdot \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0. \quad (9.5)$$

Maxwellin oivallus oli korvata virran tiheys Ampèren laissa ylläolevalla sulkausekkeella ja tuloksena oli neljäs Maxwellin laeista:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (9.6)$$

jota voi hyvällä syyllä kutsua *Ampèren ja Maxwellin laiksi*. Termiä  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  kutsutaan kentänmuutosvirraksi, kenttävirraksi tai *siirrosvirraksi*.

Maxwellin idea siirrosvirrasta oli puhtaasti teoreettinen, sillä sen vaikutus on niin pieni, että mikään tuolloinen mittausta ei ollut ristiriidassa Ampèren lain kanssa. Siirrosvirta alkaa olla verrattavissa johtavuusvirtaan vasta, kun  $\omega \epsilon / \sigma > 0.01$  eli johteiden tapauksessa taajuuksien on oltava

erittäin korkeita. Eristeissä tilanne on toinen. Jo tavallisessa 50 Hz vaihtovirtapiirissä olevan kondensaattorin läpi kulkeva virta on siirrosvirtaa. Kondensaattorin sisäistä virtaa ei tosin useinkaan tarvitse tarkastella virtapiiri-analyysissä kuten RLC-piiriä koskeneessa esimerkissä. Koska siirrosvirta tulee tyypillisesti näkyviin vasta suurilla taajuuksilla, se liittyy sähkömagneettiseen aaltoliikkeeseen luonnollisella tavalla. Hertz todensi vuonna 1888 siirrosvirran olemassaolon juuri tutkiessaan sähkömagneettisia aaltoja. Tällöin myös Maxwellin alunperin teoreettinen oivallus sai kokeellisen vahvistuksen.

Varauksen *jatkuvuusyhtälö* seuraa nyt Ampèren ja Maxwellin laista yhdessä Gaussin lain kanssa, joten sitä ei tarvitse ottaa mukaan erillisenä lakina. Toisaalta varauksen *säilymlaki* on kokeellisesti todettu luonnonlaki, jonka kanssa Maxwellin yhtälöt ovat sopuissa. Jatkuvuusyhtälö kertoo ennenkaikkea sen tosiasian, että annetussa tilavuudessa varauksen ajallinen muutos kompensoituu alueeseen tulevalle tai siitä poistuvalla sähkövirralla, koska kokonaisvaraus säilyy.

## 9.2 Maxwellin yhtälöt

Nyt meillä on koossa koko Maxwellin yhtälöiden ryhmä

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.\end{aligned}\tag{9.7}$$

Tässä lähdetermeinä ovat ulkoiset (“vapaat”) varaukset  $\rho$  ja ulkoiset (“vapaaat”) virrat  $\mathbf{J}$ . Sidotut varaukset ja virrat on kätkeyty kentiin  $\mathbf{D}$  ja  $\mathbf{H}$ . Mikäli kyseessä on tyhjiötä monimutkaisempi väliaine, tarvitaan lisäksi rakenneyhtälöt  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  ja  $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ .

Yhtälöryhmä (9.7) ei kuitenkaan ole sen yleisempi tai rajoitetumpi kuin “tyhjiömuodossa” kirjoitettu yhtälöryhmä

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho/\epsilon_0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},\end{aligned}\tag{9.8}$$

missä  $\rho$  ja  $\mathbf{J}$  kuvaavat *kaikkia* varauksia ja virtoja. Esitysmuoto (9.7) muistuttaa enemmän esitystapaa, jota Maxwell itse käytti. Tuolloin ei vektorinotaatio tosin ollut vielä käytössä vaan Maxwell kirjoitti yhtälöt komponentti

komponentilta, mikä tekee tekstistä hyvin raskaslukuista. Muotoa (9.8) voi kuitenkin jossain mielessä pitää perustavampana esitystapana. Sen lisäksi, että  $\mathbf{E}$ - ja  $\mathbf{B}$ -kentät määräävät Lorentzin voiman, tyhjiömuotoiset yhtälöt eivät erottele aineen rakenteeseen kuuluvia varauksia tai virtoja kenttien lähteenä vaan varaukset ovat varauksia ja virrat virtoja.

Vaikka usein puhutaan neljästä Maxwellin yhtälöstä, yhtälöryhmässä (9.8) on kuitenkin 8 yhtälöä (2 skalaariyhtälöä ja 6 vektoriyhtälöiden komponenttia). Yhtälöryhmä on lineaarinen, joten ratkaisuille pätee yhteenlaskuperiaate. Mikäli lähdetermit  $\rho$  ja  $\mathbf{J}$  tunnetaan, on jäljellä 6 tuntematonta ja yhtälöryhmä riittää  $\mathbf{E}$ :n ja  $\mathbf{B}$ :n määrittämiseen. Jos puolestaan etsitään itsekonsistentteja ratkaisuja, tuntemattomia on 10 kpl ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{J}$  ja  $\rho$ ), joten tarvitaan lisätietoa. Sellaiseksi kelpaa esimerkiksi Ohmin laki ( $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ ). Differentiaaliyhtälöitä ratkottaessa myös reunaehdot täytyy määrittää oikein.

### 9.3 Sähkömagneettinen kenttä rajapinnalla

Luvuissa 3 ja 6 käsiteltiin staattisten sähkö- ja magneettikenttien reunaehtoja kahden aineen rajapinnalla. Magneettivuon tiheydelle saatiin yhtälöstä  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  normaalikomponentin jatkuvuusehto, joka pätee edelleen:

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (9.9)$$

Sähköstaatiikan yhtälön  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  sijasta on käytettävä Faradayn lakia

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (9.10)$$

Tehdään samanlainen suorakulmainen silmukka kuin luvussa 3 ja integroidaan silmukan sulkeman pinnan yli:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (9.11)$$

Sovelletaan Stokesin teoreemaa lausekkeen vasemmalle puolelle ja lasketaan viivaintegraalit:

$$lE_{1t} - lE_{2t} + h_1 E_{1n} + h_2 E_{2n} - h_1 E'_{1n} - h_2 E'_{2n} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (9.12)$$

missä  $l$  on silmukan pituus rajapinnan suunnassa,  $h_1$  ja  $h_2$  ovat silmukan etäisyydet rajapinnasta kummankin väliaineen puolella ja  $E_{in}$  ja  $E'_{in}$  otavat huomioon, että normaalikomponentit saattavat poiketa toisistaan silmukan eri päissä. Kun silmukan korkeus litistetään mitättömäksi, häviävät sähkökentän normaalikomponentteja sisältävät termit ja samoin yhtälön oikea puoli, jos  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  pysyy äärellisenä. Jäljelle jää sama jatkuvuusehto kuin statiikassa:

$$E_{1t} = E_{2t}. \quad (9.13)$$

Sähkövuon tiheyden normaalikomponentin reunaehto on monimutkaisempi, koska nyt pintavaraustiheys voi muuttua. Sekaannusten välttämiseksi merkitään johtavuutta  $\sigma$ :lla ja pintavaraustiheyttä  $\sigma_s$ :llä. Yhtälöstä  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$  saadaan pillerirasiolla samannäköinen tulos kuin sähköstatiikassa:

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_s, \quad (9.14)$$

missä  $D_n = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$  ja pinnan normaalivektori  $\mathbf{n}$  osoittaa aineesta 1 aineeseen 2. Toisaalta varaustiheyden muutosta kontrolloi jatkuvuusyhtälö

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (9.15)$$

josta seuraa analogisesti

$$J_{2n} - J_{1n} = -\frac{\partial \sigma_s}{\partial t}. \quad (9.16)$$

Sovelletaan tätä yksinkertaiseen aaltoliikkeeseen eli oletetaan sähkökentän olevan muotoa  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ . Tällöin voidaan korvata  $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$ . Olettamalla lineaarinen väliaine ja käyttämällä rakenneyhtälöitä  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  ja  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  voidaan  $D_n$ :n ja  $J_n$ :n reunaehdot kirjoittaa yhtälöparina

$$\begin{aligned} \epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} &= \sigma_s \\ \sigma_2 E_{2n} - \sigma_1 E_{1n} &= i\omega \sigma_s. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Jos pintavaraustiheys häviää, on oltava  $\epsilon_1/\sigma_1 = \epsilon_2/\sigma_2$ , mikä voidaan saada aikaan valitsemalla sopivat väliaineet. Yleisesti  $\sigma_s$  ei häviä, joten se voidaan eliminoida yhtälöparista ja sähkökentän normaalikomponentille saadaan reunaehto

$$\left(\epsilon_1 + i\frac{\sigma_1}{\omega}\right) E_{1n} = \left(\epsilon_2 + i\frac{\sigma_2}{\omega}\right) E_{2n}. \quad (9.18)$$

Tarkasteltaessa  $\mathbf{H}$ -vektorin tangentialikomponenttia täytyy huomioida kentänmuutosvirta:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (9.19)$$

Tangentialikomponentin reunehto löytyy jälleen suorakulmaisesta silmukasta. Silmukkaa kutistettaessa oletetaan  $\partial \mathbf{D}/\partial t$ :n pysyvän äärellisenä, jolloin jäljelle jää magnetostatiikasta tuttu reunaehto

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}, \quad (9.20)$$

missä  $\mathbf{K}$  on pintavirran tiheys ja pinnan normaalivektori  $\mathbf{n}$  osoittaa alueesta 1 alueeseen 2. Pintavirran tiheys on nolla, jos väliaineen johtavuus on äärellinen. Siis ellei väliaineen johtavuus ole ääretön, magneettikentän tangentialikomponentti on jatkuva.

Tarkastellaan lopuksi tilannetta, jossa väliaineen 2 johtavuus on ääretön. Ampèren ja Maxwellin laki väliaineelle 2 on

$$\nabla \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_2 + \frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial t}. \quad (9.21)$$

Olettamalla harmoninen aikariippuvuus  $e^{-i\omega t}$  ja käyttämällä rakenneyhtälöitä saadaan

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{\sigma_2 - i\omega\epsilon_2} \nabla \times \mathbf{H}_2. \quad (9.22)$$

Jos  $\nabla \times \mathbf{H}_2$  on rajoitettu, niin ehto  $\sigma_2 \rightarrow \infty$  edellyttää, että  $\mathbf{E}_2 = 0$ . Olettaen myös  $\mathbf{H}_2$ :n aikariippuvuus harmoniseksi Faradayn laki ja lineaarinen rakenneyhtälö  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  antavat

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{i\omega\mu_2} \nabla \times \mathbf{E}_2 \quad (9.23)$$

ja siten myös  $\mathbf{H}_2$  häviää. Tämä kaikki tarkoittaa sitä, että sähkömagneettinen aalto ei etene äärettömän hyvään johteeseen. Koska hyvienkin johteiden johtavuudet ovat äärellisiä, tulemme tarkastelemaan luvussa 10, kuinka aalto vaimenee johteeseen edetessään.

## 9.4 Sähkömagneettinen energia ja liikemäärä

Periaatteessa koko elektrodynamiikka on nyt hallinnassa. Edellä on kuitenkin tullut eteen ongelmia liikemäärän ja liikemäärämomentin säilymlakien kanssa (kuvat 5.2 ja 7.2). Samoin on varmaankin jäänyt epäselväksi, mille oliolle esimerkiksi sähköstaattinen energia oikein kuuluu.

### 9.4.1 Poyntingin teoreema: energian säilyminen

Sähkömagneettisessa kentässä liikkuvaan yksittäiseen varaukselliseen hiukkaseen vaikuttaa Lorentzin voima  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ . Mekaniikassa on opittu, että voima tekee työtä teholla  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$  ja siten vain sähkökenttä tekee työtä hiukkaseen ja määrää hiukkasen mekaanisen energian muutosnopeuden

$$\frac{dW_{mek}}{dt} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}. \quad (9.24)$$

Muita kuin sähkömagneettisia voimia ei tässä yhteydessä oteta huomioon. Yleistys jatkuvalla virran tiheydelle alueessa  $V$  antaa hiukkassysteemin mekaanisen energian muutosnopeudeksi

$$\frac{dW_{mek}}{dt} = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (9.25)$$

Aletaan muokata pistetuloa  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$  käyttäen Maxwellin yhtälöitä väliaine-muodossa. Ampèren ja Maxwellin laki antaa

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (9.26)$$

Oikean puolen ensimmäinen termi houkuttelee käyttämään tulon derivoimiskaavaa  $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}$ , josta Faradayn lakia käyttäen tulee

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}. \quad (9.27)$$

Tähän mennessä on siis saatu

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right). \quad (9.28)$$

Oletetaan väliaine lineaariseksi ja että permittiivisyystensori on symmetrinen (näin on esimerkiksi isotrooppisen väliaineen tapauksessa). Tällöin

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right). \quad (9.29)$$

Statiikassa opitun perusteella on luonnollista tulkita, että jälkimmäisen sulkausekkeen sisällä on *sähkömagneettisen kentän energiatiheys*:

$$w_{em} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}. \quad (9.30)$$

Kun vielä määritellään *Poyntingin vektori*:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (9.31)$$

saadaan *Poyntingin teoreema* differentiaalimuodossa jatkuvuusyhtälönä

$$\frac{\partial w_{em}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \quad (9.32)$$

Poyntingin teoreemaa voi verrata varauksen jatkuvuusyhtälöön

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0,$$

joka seuraa varauksen säilymislaista. Poyntingin teoreema on siis hiukkasten ja kentän muodostaman systeemin energian säilymislaki. Sähkömagneettista kenttää voidaan siis pitää itsenäisenä fysikaalisena oliona. Tämä tulkinta vahvistuu muiden säilymislakien yhteydessä. Termi  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$  liittyy tarkasteltavan systeemin hiukkasten mekaanisen energian muutokseen ja ilmaisee sen, että kenttä ja hiukkaset voivat vaihtaa energiaa keskenään.

Integroimalla jatkuvuusyhtälö alueen  $V$  yli ja käyttämällä divergenssi-teoreemaa saadaan Poyntingin teoreema jonkin verran havainnollisempaan integraalimuotoon (merkitään tässä luvussa pintaelementtiä  $da$ , ettei tule sekaannuksia Poyntingin vektorin kanssa):

$$\frac{d}{dt} \int_V w_{em} + \oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da = - \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV \quad (9.33)$$

eli

$$\frac{d}{dt} (W_{mek} + W_{em}) = - \oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da. \quad (9.34)$$

Tämän perusteella voidaan kvalitatiivisesti ajatella, että Poyntingin vektori “kuljettaa energiaa” (SI-yksikkö on  $\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1}$  eli energiavuon yksikkö). Tällainen tulkinta johtaa kuitenkin erikoiselta vaikuttaviin tilanteisiin yksinkertaisissakin esimerkeissä, kuten tasavirtajohtimessa. Varattaessa puolestaan levykondensaattoria siihen yhdistetyllä johtimella, varaukset tulevat kondensaattoriin johdinta pitkin, mutta Poyntingin vektori osoittaa kondensaattorin sisään sivusuunnasta, joten energia kondensaattoriin näyttää tulevan jostakin systeemin ulkopuolelta.

Ei ole itsestään selvää, että Poyntingin vektorin “oikea” lauseke on (9.31). Poyntingin teoreeman differentiaalimuodon perusteella vektoriin  $\mathbf{S}$  voitaisiin lisätä roottorikenttä. Monimutkaisempiakin muunnelmia on olemassa, mutta silloin myös energiatiheyden lauseketta on muutettava. Oleellista on, että energian säilymlain muoto ei muutu. Pohjimmiltaan näissä pohdinnoissa on kyse siitä, ettei sähkömagneettisen kentän energiaa voi paikallistaa.

#### 9.4.2 Maxwellin jännitystensori

Palataan kuvan 5.2 tilanteeseen: Rikkooko elektrodynamiikka liikemäärän säilymlakia? Vastaus on toki kielteinen. Ratkaisu on siinä, että sähkömagneettisella kentällä itsellään on energian lisäksi *liikemäärää*. Säilyvä suure on hiukkasten *ja* kenttien yhteenlaskettu liikemäärä.

Oletetaan väliaine tyhjiön kaltaiseksi. Kaikkien tilavuudessa  $V$  olevien hiukkasten liikemäärien summa  $\mathbf{p}_{mek}$  noudattaa Newtonin toista lakia

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_{mek}}{dt} = \int_V (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV, \quad (9.35)$$

joten voimatiheys on

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (9.36)$$

Tämä lauseke on voimassa myös tilavuudessa, jossa  $\rho = 0$  eli positiivisia ja negatiivisia varauksia on jokaisessa tilavuuselementissä yhtä monta, mutta

tilavuudessa kulkee sähkövirtaa eli  $\mathbf{J} \neq 0$ . Eliminoidaan  $\rho$  ja  $\mathbf{J}$  Maxwellin yhtälöiden avulla, jolloin

$$\mathbf{f} = \epsilon_0(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + \left( \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B}. \quad (9.37)$$

Nyt

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}), \quad (9.38)$$

missä viimeisessä termissä on käytetty Faradayn lakia. Voimatiheys on siten

$$\mathbf{f} = \epsilon_0[(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] - \frac{1}{\mu_0}[\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (9.39)$$

Lauseke saadaan symmetrisemmäksi lisäämällä termi  $(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}/\mu_0$ , joka on aina nolla. Kenttien roottorilausekkeet voi kirjoittaa auki kaavalla

$$\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \nabla(E^2) - (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E} \quad (9.40)$$

ja samoin  $\mathbf{B}$ :lle. Näin voimatiheys saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & \epsilon_0[(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}] + \frac{1}{\mu_0}[(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}] \\ & - \frac{1}{2} \nabla \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (9.41)$$

Tämä siistiytyy määrittelemällä *Maxwellin jännitystensori*  $\mathcal{T}$ , jonka komponentit ovat

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left( E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right), \quad (9.42)$$

eli laskemalla yhteen aiemmin erikseen määritellyt staattisten sähkö- ja magneettikenttien jännitystensorit. Tensorin  $\mathcal{T}$  divergenssi on vektori, jonka komponentit ovat

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathcal{T})_j = & \epsilon_0 \left[ (\nabla \cdot \mathbf{E})E_j + (\mathbf{E} \cdot \nabla)E_j - \frac{1}{2} \nabla_j E^2 \right] \\ & + \frac{1}{\mu_0} \left[ (\nabla \cdot \mathbf{B})B_j + (\mathbf{B} \cdot \nabla)B_j - \frac{1}{2} \nabla_j B^2 \right]. \end{aligned} \quad (9.43)$$

Nämä ovat Poyntingin vektorin aikaderivaatta vaille voimatiheyden komponentit, joten

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathcal{T} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}. \quad (9.44)$$

Integroidaan tämä tilavuuden  $V$  yli ja kirjoitetaan jännitystensorista riipuva osa pintaintegraaliksi. Tällöin kokonaisvoima on

$$\mathbf{F} = \oint_{\partial V} \mathcal{T} \cdot \mathbf{n} da - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} dV. \quad (9.45)$$

Staattisessa tilanteessa sähkömagneettinen kokonaisvoima määräytyy jännitystensorista pelkästään tarkasteltavan alueen reunalla. Siis  $\mathcal{T}$  laskettuna alueen reunalla jotenkin sisältää voimien kannalta olennaisen tiedon kentistä koko alueessa. Voimien laskeminen käyttäen hyväksi tensoreita ei rajoitu elektrodynamiikkaan. Klassisesta mekaniikasta muistetaan pyöriin kappaleisiin vaikuttavien voimien käsittely hitaustensorin avulla, yleinen suhteellisuusteoria formuloidaan Einsteinin tensorin avulla jne.

### 9.4.3 Liikemäärän ja liikemäärämomentin säilyminen

Palataan sitten liikemäärän säilymiseen. Newtonin toisen lain mukaan hiukaseen vaikuttava voima on yhtä suuri kuin sen liikemäärän aikaderivaatta:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_{mek}}{dt}. \quad (9.46)$$

Toisaalta

$$\frac{d\mathbf{p}_{mek}}{dt} = \oint_{\partial V} \mathcal{T} \cdot \mathbf{n} da - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} dV. \quad (9.47)$$

Tämän voi tulkita samaan tapaan kuin Poyntingin teoreeman. Oikean puolen ensimmäinen termi kertoo liikemäärän virtauksen aikayksikössä pinnan  $\partial V$  läpi ja jälkimmäinen termi puolestaan kenttiin kertyneen liikemäärän muutoksen. Siis *sähkömagneettisen kentän liikemäärä* on

$$\mathbf{p}_{em} = \epsilon_0 \mu_0 \int_V \mathbf{S} dV. \quad (9.48)$$

Yhteenlasketun sähkömagneettisen ja mekaanisen liikemäärän muutos vastaa tarkastelualueeseen kenttien mukanaan tuomaa liikemäärää.

Olkoon  $\hat{\mathbf{p}}_{mek}$  mekaaninen liikemäärätiheys. Määritellään vastaavasti sähkömagneettisen kentän *liikemäärätiheys*

$$\hat{\mathbf{p}}_{em} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S}. \quad (9.49)$$

Tällöin liikemäärän säilyminen voidaan ilmaista differentiaalimuodossa

$$\frac{\partial}{\partial t} (\hat{\mathbf{p}}_{mek} + \hat{\mathbf{p}}_{em}) = \nabla \cdot \mathcal{T}. \quad (9.50)$$

Todetaan vielä lopuksi, että sähkömagneettisella kentällä on myös *liikemäärämomenttia* eli impulssimomenttia. Sen tiheys määritellään

$$\hat{\mathbf{L}}_{em} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}_{em} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{r} \times \mathbf{S}. \quad (9.51)$$

Myös kokonaisliikemäärämomentin tiheys on säilyvä suure. Tässä piileekin ratkaisu aiemmin kuvassa 7.2 esitettyyn ongelmaan. Levy todellakin alkaa pyöriä sähkömagneettisen liikemäärämomentin muuntuessa mekaaniseksi liikemäärämomentiksi.

## 9.5 Aaltoyhtälö ja kenttien lähteet

Kuten jo aiemmin todettiin, Hertz osoitti siirrosvirran olemassaolon tutkimalla *sähkömagneettisen aaltoliikkeen* ominaisuuksia. Juuri siirrosvirta mahdollistaa aaltojen etenemisen tyhjiössä, joskaan 1800-luvun lopulla sitä ei vielä oikein ymmärretty. Maxwell itse oli viehättynyt mekaanisiin analogioihin ja aina suhteellisuusteorian alkuvuosiin asti sähkömagneettista säteilyä pyrittiin tulkitsemaan aaltoliikkeenä hypoteettisessa väliaineessa, jota kutsuttiin eetteriksi.

### 9.5.1 Aaltoyhtälö tyhjiössä

Tarkastellaan tilannetta ensiksi tyhjiössä ( $\rho = 0$ ,  $\mathbf{J} = 0$ ). Ottamalla roottori Ampèren ja Maxwellin laista saadaan

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{E})}{\partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \quad (9.52)$$

josta kirjoittamalla vasemman puolen roottorit auki ja käyttämällä magneettikentän lähteettömyyttä saadaan aaltoyhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (9.53)$$

Ottamalla puolestaan roottori Faradayn laista ja huomioimalla, että sähkökentälläkään ei ole tyhjiössä lähteitä, saadaan sähkökentälle sama yhtälö

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (9.54)$$

Tällainen aalto etenee nopeudella  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  eli valonnopeudella.

### 9.5.2 Potentiaaliesitys

Lähdetään sitten etsimään ratkaisua Maxwellin yhtälöille, kun kenttien lähteet  $\rho$  ja  $\mathbf{J}$  oletetaan tunnetuiksi. Rajoitutaan tyhjiönkaltaiseen väliaineeseen ( $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ ), josta siirtyminen lineaariseen väliaineeseen on suoraviivaista. Tehokkainta on käyttää skalaari- ja vektoripotentiaaleja  $\varphi$  ja  $\mathbf{A}$ . Yhtälöstä  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  seuraa, että magneettivuon tiheys voidaan esittää muodossa  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Sijoittamalla tämä Faradayn lakiin saadaan

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} = 0. \quad (9.55)$$

Fysikaalisen siisteille kentille aika- ja paikkaderivaattojen järjestyksen voi vaihtaa, joten

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (9.56)$$

eli voidaan kirjoittaa  $\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t = -\nabla\varphi$ . Sähkökenttä on siis muotoa

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (9.57)$$

eli sähköstaattisen potentiaalin lisäksi Faradayn laki tuo sähkökenttään vektoripotentiaalin aikamuutoksesta johtuvan osuuden.

Näin kenttien kuusi komponenttia on ilmaistu neljän muuttujan ( $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$ ) avulla. Tähän on tarvittu neljä Maxwellin yhtälöiden kahdeksasta skalaarikomponentista, joten jäljellä on neljä yhtälöä neljän tuntemattoman ratkaisemiseen. Coulombin sekä Ampèren ja Maxwellin lait saadaan muotoon

$$\nabla^2\varphi + \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t} = -\rho/\epsilon_0 \quad (9.58)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\mu_0\mathbf{J}. \quad (9.59)$$

Päällisin puolin yhtälöryhmä näyttää pahemmalta kuin alkuperäiset Maxwellin yhtälöt, mutta sille löytyy käteviä ratkaisumenetelmiä.

Koska kentät  $\mathbf{B}$  ja  $\mathbf{E}$  muodostuvat potentiaalien derivaatoista, voidaan potentiaaleihin lisätä sellaisia tekijöitä, jotka katoavat derivoitaessa. On helppo nähdä, että seuraava muunnos ei vaikuta kenttiin:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Psi \quad (9.60)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \partial\Psi/\partial t. \quad (9.61)$$

Näitä *mittamuunnoksia* käsitellään tarkemmin kappaleessa 9.6. Yksi tapa säilyttää alkuperäiset kentät on käyttää *Lorenzin mittahtoa*<sup>1</sup>

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \quad (9.62)$$

Jäljellä olevat yhtälöt yksinkertaistuvat *epähomogeenisiksi aaltoyhtälöiksi*

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi = -\rho/\epsilon_0 \quad (9.63)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J}. \quad (9.64)$$

<sup>1</sup>Kyseessä on todellakin Lorenzin mitta eikä Lorentzin mitta. Ludvig V. Lorenz (1829–1891) oli tanskalainen ja Hendrik A. Lorentz (1853–1928) hollantilainen fyysikko. Lorenz käytti mittahtoa aaltoyhtälön ratkaisemiseen jo vuonna 1867. Ilmeisen virheellinen muoto “Lorentzin mitta” esiintyy lähes kaikissa elektrodynamiikan oppikirjoissa eikä suurin osa fyysikoista ole edes kuulut koko sekaannuksesta. Kuriositeettina mainittakoon, että fysiikassa tunnetaan myös Lorenzin ja Lorentzin yhtälö. Se on itse asiassa luvussa 3 esitetyn Clausiuksen ja Mossottin yhtälön (3.51) toinen nimi.

### 9.5.3 Viivästyneet potentiaalit

Edellä löydettiin siis neljä karteesisissa koordinaateissa toisistaan riippumattonta matemaattisesti samanmuotoista skalaariyhtälöä, joten riittää tarkastella yhtälöä  $\varphi$ :lle. Staattisessa tapauksessa kyseessä olisi Poissonin yhtälö, jonka ratkaisuja ovat Laplacen yhtälön yleiset ratkaisut sekä jokin Poissonin yhtälön erikoisratkaisu.

Ratkaistaan aaltoyhtälö ensin yhdelle varaukselle, joka on sijoitettu origoon. Tällöin homogeeninen aaltoyhtälö

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = 0 \quad (9.65)$$

pätee kaikkialla muualla kuin origossa. Pallosymmetrian vuoksi  $\varphi = \varphi(r)$  ja homogeeninen aaltoyhtälö voidaan kirjoittaa pallokoordinaatistossa

$$\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2} = 0. \quad (9.66)$$

Tällä on tutut  $\pm r$ -suuntiin etenevät ratkaisut

$$r\varphi = f(r - ct) + g(r + ct). \quad (9.67)$$

Näistä  $f(r - ct)$  etenee pois päin varauksesta ja  $g(r + ct)$  kohti varausta. Koska halutaan ymmärtää varauksen vaikutus ympäristöönsä, tarkastellaan ratkaisua  $f$ .

On siis löydetty homogeeniselle aaltoyhtälölle pallosymmetrinen ratkaisu

$$\varphi = \frac{f(r - ct)}{r} \quad (9.68)$$

ja nyt on määritettävä funktio  $f$ . Staattisessa tapauksessa potentiaali on

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (9.69)$$

ja nyt ilmeisesti  $q = q(t)$ . Kirjoitetaan  $f$  ajan funktiona  $f(t - r/c)$ , missä vakio  $-c$  sisältyy määrättävään funktioon itseensä. Hetkellä  $t - r/c$  pätee

$$f(t - r/c) = \frac{q(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0} \quad (9.70)$$

ja yksittäisen varauksen epähomogeenisella aaltoyhtälöllä on ratkaisu

$$\varphi(r, t) = \frac{q(t - r/c)}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (9.71)$$

Integroimalla kaikkien varausten yli saadaan

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (9.72)$$

missä on siis otettu käyttöön *viivästynyt aika*:

$$t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c. \quad (9.73)$$

Potentiaalia  $\varphi$  kutsutaan *viivästyneeksi skalaaripotentialiksi*, koska se huomioi ajan, joka kuluu kustakin pisteestä tarkastelupisteeseen nopeudella  $c$  etenevältä signaalilta.

**HT:** Tarkka lukija lienee ihmetellyt ajasta riippuvaa pistevarausta, koska varauksenhan pitäisi säilyä. Millä tavalla tästä näennäisestä ristiriidasta selvitään helpoimmin?

Koska jälleen samoilla yhtälöillä on samat ratkaisut, osataan välittömästi kirjoittaa myös *viivästynyt vektoripotentiali*:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (9.74)$$

Sähkö- ja magneettikentät saadaan näistä derivoimalla. Olemme siis ratkaisseet Maxwellin yhtälöt annetuille varaus- ja virtajakautumille. Käytännössä derivaattojen laskeminen on usein työlästä. Sitä kannattaa kokeilla sijoittamalla potentiaalien integraalilausekkeet takaisin aaltoyhtälöön.

Suppeammassa suhteellisuusteoriassa vektori- ja skalaaripotentialien aaltoyhtälöt kootaan nelipotentialin  $A^\alpha = (\varphi/c, \mathbf{A})$  aaltoyhtälöksi

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A^\alpha = -\mu_0 j^\alpha, \quad (9.75)$$

missä nelivirran  $j^\alpha$  komponentit ovat  $(c\rho, \mathbf{J})$ . Osoittautuu, että Maxwellin yhtälöt ovat Lorentz-kovariantteja<sup>2</sup> eli valmiiksi yhteensopivia suhteellisuusteorian kanssa.

#### 9.5.4 Aaltoyhtälön Greenin funktio<sup>3</sup>

Ratkaistaan aaltoyhtälö vielä malliksi käyttämällä kappaleessa 2.10 esitettyjä Greenin funktioita. Sekä  $\mathbf{A}$ :n että  $\varphi$ :n aaltoyhtälöt ovat muotoa

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\mathbf{r}, t), \quad (9.76)$$

<sup>2</sup>Mitta on siis Lorenzin, mutta suhteellisuusteorian koordinaatistomuunnokset ovat peräisin Lorentzilta.

<sup>3</sup>Tämä luku kuuluu kurssivaatimukset ylittävään yleissivistykseen. Perusidea on kuitenkin syytä ymmärtää, koska menetelmää käytetään myöhemmin laskettaessa liikkuvan varauksen kenttiä.

missä  $f(\mathbf{r}, t)$  on tunnettu lähde-termi. Tehdään sekä  $\psi$ :lle että  $f$ :lle Fourier-muunnos ajan suhteen:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega ; f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega . \quad (9.77)$$

Sijoittamalla nämä aaltoyhtälöön ja merkitsemällä  $k = \omega/c$  saadaan Fourier-komponenteille *epähomogeeninen Helmholtzin aaltoyhtälö*

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\mathbf{r}, \omega) = -4\pi f(\mathbf{r}, \omega) . \quad (9.78)$$

Tapauksessa  $k = 0$  tämä palautuu Poissonin yhtälöksi. Helmholtzin yhtälön Greenin funktion täytyy toteuttaa yhtälö

$$(\nabla^2 + k^2) G_k(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') . \quad (9.79)$$

Epähomogeenisen aaltoyhtälön ratkaisu on silloin

$$\psi(\mathbf{r}, \omega) = \int G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) f(\mathbf{r}', \omega) dV' , \quad (9.80)$$

johon voidaan lisätä homogeenisen aaltoyhtälön ratkaisuja.

Koska aaltoyhtälöä ratkotaan käytännössä heijastavien reunojen, aaltoputkien jne. yhteydessä, Greenin funktion muoto riippuu ongelman reunaehdoista (vrt. pallo kappaleessa 2.10). Reunattomassa avaruudessa  $G_k$  on pallosymmetrinen ja riippuu ainoastaan tarkastelupisteen ja lähdepisteen etäisyydestä  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , joten pallokoordinaateissa

$$\nabla^2 G_k = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial G_k}{\partial R} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} (R G_k) . \quad (9.81)$$

Koska  $R$  on ainoa muuttuja, voidaan käyttää kokonaisderivaattaa:

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (R G_k) + k^2 G_k = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') . \quad (9.82)$$

Muualla kuin pisteessä  $R = 0$  tämä yksinkertaistuu yhtälöksi

$$\frac{d^2}{dR^2} (R G_k) + k^2 (R G_k) = 0 , \quad (9.83)$$

jonka ratkaisut ovat

$$R G_k = A e^{ikR} + B e^{-ikR} . \quad (9.84)$$

Rajalla  $R \rightarrow 0$  pätee  $kR \ll 1$  ja (9.82) palautuu Poissonin yhtälöksi, jonka ratkaisu käyttäytyy kuten  $1/R$ . Tämä antaa sidosehdon  $A + B = 1$  ja Greenin funktio on muotoa

$$G_k(R) = A G_k^+(R) + B G_k^-(R) \quad (9.85)$$

missä  $G_k^\pm = e^{\pm ikR}/R$ . Näistä  $G_k^+$  kuvaa origosta poispäin etenevää palloaaltoa ja  $G_k^-$  origoon tulevaa palloaaltoa.  $A$  ja  $B$  määräytyvät reunaehdoista ajan suhteen. Jos lähde on hiljaa hetkeen  $t = 0$  asti ja alkaa sitten vaikuttaa, ulospäin etenevä ratkaisu  $A G_k^+$  on fysikaalisesti mielekäs valinta.

**HT:** Mieti, milloin puolestaan  $B G_k^-$  on parempi valinta.

Ajasta riippuva Greenin funktio toteuttaa yhtälön

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G^\pm(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (9.86)$$

Koska

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t'} e^{-i\omega t}, \quad (9.87)$$

voidaan lähdetermi yhtälössä (9.79) kirjoittaa muodossa  $-4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{i\omega t'}$  ja

$$G^\pm(R, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm ikR}}{R} e^{-i\omega\tau} d\omega, \quad (9.88)$$

missä  $\tau = t - t'$ . Äärettömän avaruuden Greenin funktio riippuu siis vain lähteen ja havaitsijan välisestä etäisyydestä  $R$  ja aikaerosta  $t - t'$ . Koska  $k = \omega/c$ , voidaan  $\omega$ -integraali laskea ja lopputulos on

$$G^\pm(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t' - [t \mp |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c]). \quad (9.89)$$

Nyt  $G^+$  on *viivästynyt* ja  $G^-$  *edistynyt* Greenin funktio.

Epähomogeenisen aaltoyhtälön ratkaisu on siis

$$\psi^\pm(\mathbf{r}, t) = \int \int G^\pm(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t') dV' dt', \quad (9.90)$$

johon voi lisätä homogeenisen aaltoyhtälön ratkaisuja. Viivästyneelle Greenin funktiolle ratkaisu on tietenkin sama kuin edellä suuremmalla laskulla löytynyt ratkaisu. Tässä esitetty menetelmä on kuitenkin yleisempi ja käyttökelpoisempi tarkasteltaessa monimutkaisempia olosuhteita kuin yksinkertaista lähdettä reunattomassa avaruudessa.

## 9.6 Mittainvarianssi

Aaltoyhtälön ratkaisu helpottui valitsemalla sopiva mitta. Tämän teki mahdolliseksi Maxwellin yhtälöiden tärkeä ominaisuus: *mittainvarianssi*. Kenttien potentiaaleja voidaan muuttaa tietyllä yleisellä tavalla ilman, että kentät

itse muuttuvat. Elektrodynamiikan mittamuunnokset ovat muotoa

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Psi \quad (9.91)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \partial\Psi/\partial t. \quad (9.92)$$

Funktiota  $\Psi$  kutsutaan *mittafunktioksi* ja se voidaan valita usealla eri tavalla. Yksi näistä on edellä käytetty Lorenzin mittaehto

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\varphi'}{\partial t} = 0. \quad (9.93)$$

Tällöin mittafunktion  $\Psi$  on toteutettava aaltoyhtälö

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial\varphi}{\partial t}. \quad (9.94)$$

Jos siis potentiaalit  $\mathbf{A}$  ja  $\varphi$  eivät toteuttaisi Lorenzin mittaehto, niin uudet potentiaalit  $\mathbf{A}'$  ja  $\varphi'$  toteuttavat sen, jos  $\Psi$  voidaan ratkaista aaltoyhtälöstä. Lorenzin mittaehdon toteuttava funktio  $\Psi$  on aina olemassa, mutta se ei ole yksikäsitteinen. Mitan etu on, että yhtälöiden Lorentz-kovarianssi näkyy eksplisiittisesti ja tulokset on suoraviivaista siirtää koordinaatistosta toiseen. Käytännön laskut voivat kuitenkin olla hyvin monimutkaisia.

Useissa tapauksissa laskennallisesti yksinkertaisempi vaihtoehto on *Coulombin mitta*, jonka mittaehto on

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = 0. \quad (9.95)$$

Vektoripotentiaali saadaan muunnoksella

$$\nabla^2\Psi = -\nabla \cdot \mathbf{A}, \quad (9.96)$$

joka määrittää mittafunktion additiivista vakiota vaille yksikäsitteisesti, jos  $\mathbf{A} \rightarrow 0$  ja  $\varphi \rightarrow 0$ , kun  $r \rightarrow \infty$ . Coulombin mitassa skalaaripotentiaali ratkaistaan yhtälöstä (9.58):

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (9.97)$$

Aika ei ole viivästetty, vaan skalaaripotentiaali määräytyy samanaikaisesti varausjakautumasta kaikkialla, joten Coulombin mitta ei ole Lorentz-kovariantti. Tämän mitan avulla annetut potentiaalit antavat kuitenkin oikeat Maxwellin yhtälöt, joten tästä ei seuraa ristiriitaa kenttien  $\mathbf{E}$  ja  $\mathbf{B}$  osalta. Koordinaatistomuunnosten kanssa on kuitenkin oltava tarkkana.

Coulombin mitassa vektoripotentiaali toteuttaa aaltoyhtälön

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \mu_0\mathbf{J}. \quad (9.98)$$

Oikean puolen ensimmäinen termi on pyörteetön eli sen roottori on nolla. Helmholtzin teoreeman mukaan vektorikenttä  $\mathbf{F}$  voidaan jakaa pyörteettömään ja lähteettömään (divergenssittömään) osaan:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t ; \nabla \times \mathbf{F}_l = 0 ; \nabla \cdot \mathbf{F}_t = 0 ,$$

missä  $l$  viittaa pitkittäiseen (longitudinaaliseen, pyörteettömään) ja  $t$  poikittaiseen (transversaaliseen, lähteettömään) osuuteen. Käyttämällä virran jatkuvuusyhtälöä aaltoyhtälö saadaan muotoon (ks. esim. Jackson)

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}_t . \quad (9.99)$$

Koska vektoripotentiaali määräytyy vain virran poikittaisesta komponentista, Coulombin mitta kutsutaan usein poikittaismitaksi. Se tunnetaan myös nimellä säteilymitta, koska sähkömagneettiset säteilykentät saadaan laskeksi viivästyneestä vektoripotentiaalista

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_t(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' , \quad (9.100)$$

mikä on olennaisesti helpompaa kuin säteilykenttien laskeminen Lorenzin mitassa. Coulombin mitta erottelee annetussa koordinaatistossa sähkökentän staattiseen ( $s$ ) ja induktiiviseen ( $i$ ) osaan

$$\mathbf{E}_s = -\nabla\varphi ; \mathbf{E}_i = -\partial\mathbf{A}/\partial t . \quad (9.101)$$

Klassinen elektrodynamiikka on ensimmäinen esimerkki mittainvarian-teista fysiikan perusteorioista. Mittakentän käsitteestä on tullut erittäin keskeinen fysiikan perusteorioissa kuten kvanttielektrodynamiikassa, sähköheikon vuorovaikutuksen teoriassa, kvanttikromodynamiikassa ja näitä yhdistävissä yhtenäiskenttäteorioissa.