

## Luku 7

# Sähkömagneettinen induktio

Toistaiseksi on tarkasteltu vain ajasta riippumattomia kenttiä. Ne voi mainiosti kuvitella kenttäviivojen avulla, joten emme ole törmänneet mihinkään, mikä puolustaisi Feynmanilta kurssin alussa lainattua toteamusta sähkömagneettisen kentän kuvittelemisen vaikeudesta. Tässä luvussa alamme tutustua ajasta riippuviin kenttiin ja siirrymme alueelle, jossa mielikuvitus joutuu paljon kovemmalle koetukselle.

### 7.1 Faradayn laki

Sähköstaattiselle kentälle pätee  $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ . Mikäli kenttä ei ole staattinen ja siten integraali ei ole nolla, silmukkaan  $C$  sanotaan indusoituvan *sähkömotorisen voiman* (smv):

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}. \quad (7.1)$$

Tässä  $\mathbf{E}'(\mathbf{r})$  on kenttä silmukka-alkion  $d\mathbf{l}(\mathbf{r})$  kohdalla. Havaintojen mukaan smv vastaa silmukan läpäisevän magneettivuon muutosta:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (7.2)$$

Tämä on *Faradayn induktiolaki*. Se ei riipu mitenkään siitä, kuinka magneettivuon tiheys itsessään muuttuu. Lain olemassaolo ei myöskään riipu fyysisen silmukan olemassaolosta, vaan pätee annettua reittiä  $C$  pitkin lasketulle integraalille. Faradayn laki on kokeellinen luonnonlaki, joka ei voi johtaa muista luonnonlaeista.

Sähkömotorisen voiman yksikkö on sama kuin potentiaalieron eli voltti. Sähkömotorinen voima ei kuitenkaan ole minkään kahden pisteen välinen jännite, koska se lasketaan aina suljetun silmukan yli!

Jos tarkastellaan liikkuvia silmukoita ja mahdollisesti liikkeen mukana muuttuvia silmukoita, on oltava huolellinen. Faradayn lain integraalimuodossa olevan kokonaisaikaderivaatan on otettava huomioon nämä muutokset. On tärkeää huomata, että  $\mathbf{E}'(\mathbf{r})$  on sähkökenttä alkion  $d\mathbf{l}(\mathbf{r})$  kohdalla koordinaatistossa, jossa  $d\mathbf{l}$  on levossa. Jos nimittäin silmukka olisi todellinen virtapiiri, niin nimenomaan kenttä  $\mathbf{E}'$  aiheuttaisi siinä virran.

Oletetaan seuraavassa aluksi, että Faradayn laissa olisi kokeellisesti määritettävä verrannollisuuskerroin  $k$  siten, että

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = -k \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (7.3)$$

Vedotaan lisäksi klassiseen Galilei-invarianssiin eli siihen, että toistensa suhteen vakionopeudella  $\mathbf{v}$  liikkuvissa koordinaatistoissa  $K$  ja  $K'$  fysiikan lait ovat samat muunnoksessa  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t$ ,  $t' = t$ .

Vuo silmukan läpi voi johtua eksplisiittisestä aikariippuvuudesta ( $\partial/\partial t$ ) tai muutoksesta liikkeen vuoksi ( $\mathbf{v} \cdot \nabla$ ) eli  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ . Nyt on helppo harjoitustehtävä osoittaa, että

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS + \oint_C \mathbf{B} \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}. \quad (7.4)$$

Tällöin Faradayn laki saa muodon

$$\oint_C (\mathbf{E}' - k(\mathbf{v} \times \mathbf{B})) \cdot d\mathbf{l} = -k \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (7.5)$$

Tämä voidaan tulkita toisinkin. Tilannetta sivusta tarkastelevan levossa olevan havaitsijan voi ajatella katsovan paikallaan olevaa silmukkaa  $C$ . Faradayn laki sovellettuna tällaiseen *kiinteään* silmukkaan on

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -k \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (7.6)$$

missä  $\mathbf{E}$  on kyseisen havaitsijan näkemä kenttä. Galilei-invarianssin perusteella on oltava  $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + k(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ .

Tarkastellaan sitten todellisessa johtimessa liikkuvaa virtaa kuljettavaa elektronia. Silmukan  $C$  mukana liikkuvan koordinaatiston suhteen johdinelektronit ovat käytännössä levossa (tässä kannattaa ajatella tavanomaista metallijohdinta ja siinä kulkevaa sähkövirtaa). Elektroneihin vaikuttavassa Lorentzin voimassa on siis vain sähköinen osuus  $q\mathbf{E}'$ . Ulkopuolisen havaitsijan mielestä Lorentzin voima on  $q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ , joten on oltava  $k = 1$ .

Nyt Faradayn laki saadaan helposti differentiaalimuotoon. Oletetaan, että silmukka  $C$  on levossa valitussa koordinaatistossa. Tällöin myös kentät  $\mathbf{B}$  ja  $\mathbf{E}$  on määritelty samassa koordinaatistossa. Stokesin kaavan avulla saadaan

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (7.7)$$

Koska silmukka on muuten mielivaltainen, niin on oltava

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (7.8)$$

joka on Maxwellin kolmas yhtälö.

**Huom.** Tarkasteltaessa liikkuvaa silmukkaa oletettiin implisiittisesti, että  $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$ . Tämä on totta kertalukuun  $(v/c)^2$  asti. Kenttien relativistisiin muunnoskaavoihin perehdytään luvussa 14. Faradayn laki ei kuitenkaan ole approksimaatio, vaan fysiikka on samaa kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa, joita yhdistää Lorentzin muunnos.

Faradayn laissa oleva miinusmerkki ilmaisee *Lenzin lain*: “Induktiovirta vastustaa muutosta, joka sen aiheuttaa”. Induktiovirta kuluttaa energiaa. Tämä energia on saatava systeemiltä, joka aiheuttaa induktion. Tämä merkitsee, että induktion aiheuttajan on tehtävä työtä induktiovirran vastavaikutuksen voittamiseksi. Lenzin laki on usein kätevä tapa määrittää indusoituvan virran suunta, joka saattaa olla vaikea johtaa aikaderivaatan ja roottorin sisältävästä abstraktin näköisestä Faradayn laista.

Faradayn lain avulla voidaan ymmärtää esimerkiksi *betatronin* toiminta. Vain sähkökenttä voi tehdä työtä varaukselliseen hiukkaseen. Betatronissa muuttuva magneettikenttä indusoi hiukkasia kiihdyttävän sähkökentän.

### Esimerkki. Liikkuva johdin magneettikentässä

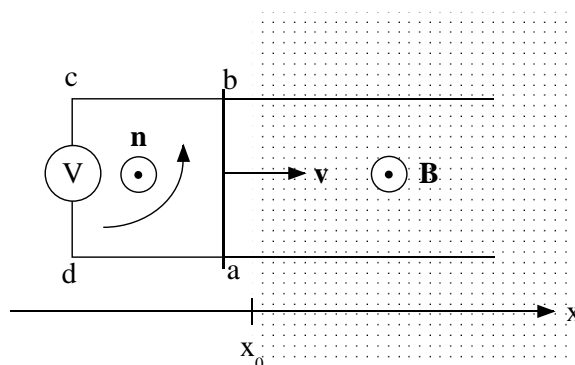
Tarkastellaan yksinkertaisena, mutta toivottavasti ajatuksia herättävänä esimerkkinä magneettikentässä liikkuvaa johdetankoa (kuva 7.1). Oletetaan, että johdetanko  $ab$  (pituus  $l$ ) liikkuu vakionopeudella  $\mathbf{v}$  pitkin johdinkiskoja ja saapuu alueeseen  $x > x_0$ , jossa on vakiomagneettikenttä  $\mathbf{B}$  kohtisuorassa silmukan tasoa vastaan. Asetetaan välille  $cd$  suuriresistanssinen jännitemittari, joten silmukan  $abcd$  ollessa kokonaan magneettikentän ulkopuolella siinä ei kulje virtaa.

Kentässä olevan johdetangon vapaisiin varauksiin vaikuttaa Lorentzin voima

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (7.9)$$

Voiman magneettinen osa ajaa positiivisia ja negatiivisia varauksia tangon eri päihin. Tämä aiheuttaa sähkökentän, joka pyrkii vastustamaan varausseparaatiota ja syntyy tasapainotilanne, jossa sähkökenttä suuntautuu pisteestä  $a$  kohti pistettä  $b$  ja kentän suuruus on  $E = vB$ . Tangon päiden  $a$  ja  $b$  välillä on jännite

$$V_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = El = Blv. \quad (7.10)$$



Kuva 7.1: Magneettikenttään saapuva kiskoilla liikkuva johdintanko. Huomaa positiivisten suuntien valinnat.

Tämä on siis liikkeen indusoima potentiaaliero. Sitä kutsutaan joskus myös liikkeen indusoimaksi smv:ksi, mitä se ei tarkkaan ottaen oikeastaan ole, koska smv määritellään integraalina suljettua lenkkiä pitkin.

Potentiaalieron laskemiseksi ei tarvittu induktiolakia ollenkaan, vaan mikrofysikaalinen tarkastelu riitti. Toisaalta voidaan laskea magneettivuo silmukan  $abcd$  läpi, kun johdintanko kulkee magneettikentässä. Valitsemalla integroimisinnan eli silmukan tason normaalivektori magneettikentän suuntaiseksi saadaan vuon muutosnopeudeksi

$$\frac{d\Phi}{dt} = B \frac{dA}{dt} = Bl \frac{dx}{dt} = Blv, \quad (7.11)$$

joten Faradayn lain mukaan piiriin indusoituu smv

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -Blv. \quad (7.12)$$

Merkki kertoo, että sähkömotorinen voima vaikuttaa kuvaan merkittyä positiivista kiertosuuntaa vastaan. Jos virtapiiri oikosuljettaisiin jännitemittarin kohdalta, niin induktiovirta kulkisi myötäpäivään. Induktiovirta pyrkii siis pienentämään magneettivuon muutosta silmukan läpi.

Ajatellaan sitten, että neliösilmutta (sivu  $l$ ) saapuu magneettikenttään nopeudella  $\mathbf{v}$ . Oikosuljetaan piiri, jolloin virta voi kulkea siinä. Silmukan tullessa magneettikenttään vuon muutos on vakio ( $-Blv$ ), ja piiriin syntyvän myötäpäivään kulkevan induktiovirran suuruus on  $Blv/R$  ( $R$  on piirin resistanssi). Kun silmutta on kokonaan magneettikentän sisällä, vuo ei enää muutu ja virta lakkaa kulkemasta (itseinduktion takia virran kulku ei käytännössä lopu aivan heti). Kannattaa huomata, että induktioilmiö voitaisiin tässäkin tapauksessa selittää Lorentzin voiman avulla.

Silmukan tullessa kenttään sivuun  $ab$  kohdistuu nopeudelle vastakkais-suuntainen voima  $\mathbf{F}$  suuruudeltaan  $Bll$ , joten silmukan kiskomiseen tarvittava teho on  $Fv = Bllv$ . Tämä on täsmälleen yhtä suuri kuin virtasilmukan ohmiset tehohäviöt.

Oletetaan nyt, että neliösilmutka on kokonaan alueessa  $x > x_0$  eikä liiku. Muutetaan magneettikenttää silmukan kohdalla ajan funktiona:  $B(t) = Bvlt/l$ . Tällöin magneettivuo silmukan läpi on  $\Phi(t) = Bvlt$ , jolloin vuon muutos on sama kuin edellä liikkuvan tangon tapauksessa. Ratkaisevana erona on se, ettei induktioilmiötä voida tässä tapauksessa selittää Lorentzin voiman avulla.

Magneettikenttään saapuvan silmukan tilannetta voitaisiin tarkastella myös silmukan mukana liikkuvan tarkkailijan kannalta. Hän ei havaitse magneettista voimaa ( $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$ , koska hänen koordinaatistossaan  $\mathbf{v} = 0$ ), joten taas tarvitaan induktiolakia selittämään sähkömotorisen voiman syntymisen.

Se, että liikkeen indusoima jännite on yhtä suuri kuin muuttuvan magneettikentän aiheuttama sähkömotorinen voima, ei ole itsestään selvää. Tämän ekvivalenssin selvittäminen oli keskeisessä osassa, kun Einstein kehitti suppeamman suhteellisuusteorian vuonna 1905. Liikkuviissa koordinaatistoissa oikean integroimistien valinta vuon muutoksen laskemiseksi ei ole aina helppoa. Koska Maxwellin yhtälöt kuitenkin osoittautuvat Lorentzinvariantteiksi, Faradayn laki differentiaalimuodossa ja Lorentzin voiman lausekke pätevät kaikissa inertiaalikoordinaatistoissa.

## 7.2 Itseinduktio

Tarkastellaan eristettyä virtasilmukkaa, jossa magneettivuo on silmukan itsensä aiheuttama. Biot'n ja Savartin lain mukaan magneettikenttä riippuu lineaarisesti silmukassa kulkevasta sähkövirrasta  $I$ . Kiinteässä muuttumattomassa silmukassa vuon muutos johtuu vain virran muutoksesta, joten

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dI} \frac{dI}{dt}. \quad (7.13)$$

Virran ja vuon muutoksen välistä verrannollisuuserrointa

$$L = \frac{d\Phi}{dI} \quad (7.14)$$

kutsutaan silmukan *itseinduktanssiksi*. Jos vuo on suoraan verrannollinen virtaan, niin  $L = \Phi/I$ . Virran muutos indusoi sähkömotorisen voiman

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (7.15)$$

Koska sähkömotorisen voiman SI-yksikkö on voltti, niin induktanssin SI-yksikkö on  $\text{Vs A}^{-1} \equiv \text{H}$  eli henry. Itseinduktio ilmenee esimerkiksi siten, että virtapiireissä virta ei koskaan kytkeydy tai katkea täysin hetkellisesti. Itseinduktio korostuu, jos piirissä on käämi, koska silloin piirin induktanssi on käytännössä sama kuin käämin induktanssi.

### Esimerkki. Toroidaalisen kelan itseinduktanssi

Kierretään johdinlankaa  $N$  kierrosta toruksen ympäri (poikkileikkauksen ala  $A$ ). Itseinduktanssiin vaikuttaa sekä kela itse että silmukkaan virtaa syöttävä johteen ulkoinen osa. Oletetaan, että ulkoinen osa on koaksiaalikaapeli, joka ei aiheuta merkittävää ulkoista kenttää. Ampèren kiertosääntö antaa magneettikentäksi toruksen sisällä

$$B = \mu_0 N I / l, \quad (7.16)$$

missä  $l$  on toruksen keskimääräinen pituus (luku 5.3). Magneettivuo jokaisen yksittäisen kierroksen läpi on

$$\Phi_1 = \mu_0 N I A / l \quad (7.17)$$

ja kaikkien kierrosten yhteenlaskettu vuo on  $\Phi = N \Phi_1$ , josta saadaan induktanssi

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = \mu_0 N^2 A / l. \quad (7.18)$$

## 7.3 Keskinäisinduktio

Tarkastellaan sitten  $n$  kappaletta erillisiä silmukoita. Kirjoitetaan kaikkien silmukoiden aiheuttama yhteenlaskettu vuo silmukan  $i$  läpi muodossa

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n \Phi_{ij}. \quad (7.19)$$

Tähän silmukkaan indusoituu smv

$$\mathcal{E}_i = - \sum_{j=1}^n \frac{d\Phi_{ij}}{dt}. \quad (7.20)$$

Jos kaikki silmukat ovat kiinteitä, kunkin silmukan  $j$  osuus  $\Phi_{ij}$  riippuu vain siinä kulkevan virran  $I_j$  muutoksesta, joten

$$\frac{d\Phi_{ij}}{dt} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} \frac{dI_j}{dt}. \quad (7.21)$$

Kertoimia

$$M_{ij} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j}, \quad i \neq j. \quad (7.22)$$

kutsutaan silmukoiden  $i$  ja  $j$  väliseksi *keskinäisinduktansseiksi*;  $L_i = M_{ii}$  on silmukan  $i$  itseinduktanssi. Jos väliaine on magneettisesti lineaarinen,  $M_{ij}$ :t ovat vakioita. Keskinäisinduktanssi voi olla positiivinen tai negatiivinen riippuen virtojen kulkusuunnista silmukoissa.

Tarkastellaan kahta kiinteää silmukkaa lineaarisessa väliaineessa (yksinkertaisuuden vuoksi  $\mu = \mu_0$ ). Tällöin

$$M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}. \quad (7.23)$$

Lasketaan magneettikenttä Biot'n ja Savartin lailla ja integroidaan siitä magneettivuo:

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{S_2} \left[ \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right] \cdot \mathbf{n} dS_2. \quad (7.24)$$

Käyttämällä kaavaa

$$\oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = \nabla_2 \times \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (7.25)$$

saadaan

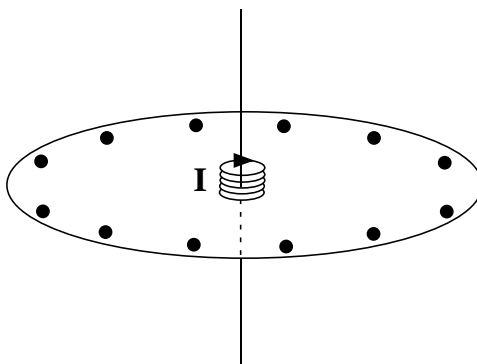
$$\begin{aligned} M_{21} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_2} \nabla_2 \times \left[ \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \right] \cdot \mathbf{n} dS_2 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}, \end{aligned} \quad (7.26)$$

jota kutsutaan *Neumannin kaavaksi*. Se ei ole kovin käytännöllinen, mutta se osoittaa, että keskinäisinduktanssi on puhtaasti silmukoiden geometriasta johtuva suure ja siten silmukoiden itsensä ominaisuus. Silmukoissa kulkeva sähkövirta ei vaikuta lineaarisessa tapauksessa induktanssiin. Lisäksi keskinäisinduktanssi on symmetrinen silmukoiden vaihtamisen suhteen ( $M_{12} = M_{21}$ ), mikä vaikuttaa ensi näkemältä hieman yllättävältä.

Keskinäisinduktanssin laskeminen on hankalaa, mutta mittaaminen varsin yksinkertaista: Syötetään piiriin 1 tunnettu virta ja mitataan sen indusoi- ma smv piirissä 2. Helpointa tämä on toteuttaa sinimuotoisen vaihtovirran avulla.

## 7.4 Pähkinä purtavaksi: Feynmanin kiekko

Palataan lopuksi perusongelmien pariin (Feynman, osa 2, luku 17-4). Tarkastellaan levyä, joka pääsee pyörimään akselinsa ympäri (kuva 7.2). Keskellä on käämi, jossa pieni paristo pitää yllä tasavirtaa. Levyn reunalla on tasainen varausjakauma, esimerkiksi samanlaisia varattuja palloja. Oletetaan, että levy ei tässä tilanteessa pyöri. Oletetaan sitten, että virta käämissä katkeaa äkillisesti ilman ulkopuolista vaikutusta. Alkaako levy pyöriä?



Kuva 7.2: Levy, jonka keskellä kulkevassa käämissä kulkee tasavirta  $I$ . Reunalla on tasaisin välein varattuja palloja.

*Vastaus 1:* Magneettikentän heikkeneminen indusoi vähäksi aikaa sähkökentän. Geometrian perusteella kenttäviivat ovat ympyröitä, joiden keskipiste on levyn akselilla. Varauspalloihin kohdistuva voima aiheuttaa silloin vääntömomentin, jonka takia levy alkaa pyöriä.

*Vastaus 2:* Laitteiston liikemäärämometti ennen virran katkaisua on nolla. Siihen ei kohdistu ulkoisia voimia, joten liikemäärämomentin<sup>1</sup> säilymislain perusteella levy ei ala pyöriä.

Jos ensimmäinen vastaus on oikea, miten käy liikemäärämomentin säilymislain? Jos taas jälkimmäinen selitys pätee, niin sovellettiinko induktiolakia väärin? Kysymykseen palataan luvussa 9.

<sup>1</sup>Liikemäärämomenttia sanotaan usein myös impulssimomentiksi. Liikemäärämomenttia ja liikemäärää ei missään tapauksessa saa sekoittaa toisiinsa!