

Luku 3

Sähkökenttä väliaineessa

Edellä tarkasteltiin sähköstaattista kenttää tilanteissa, joissa oli annettuja varausjakautumia tai vapaita varauksia johdekappaleiden pinnalla. Läheskään kaikki aineet eivät kuitenkaan ole johteita. Hyvän johteen vastakohta on ideaalinen eriste, jossa ei ole lainkaan vapaita varauksia. Aine on kuitenkin koostunut positiivisista atomytimistä ja negatiivisista elektroneista. Jos eriste asetetaan sähkökenttään, kenttä aiheuttaa voimavaikutuksen eristeen rakenneosasiin. Vaikutuksen suuruus riippuu aineen mikroskooppisista ominaisuuksista. Eristeeseen syntyvää makroskooppista vaikutusta kuvataan eristeen erimerkkisten varausten siirtymänä toistensa suhteen. Aineen sanotaan tällöin polarisoituneen. Sisäisen polarisoituman ja ulkoisen kentän vuorovaikutusketju on usein hyvin monimutkainen, sillä polarisoituma muuttaa puolestaan ulkoista kenttää. Mikäli eristeen lähellä on johdekappaleita, niiden pinnalle indusoituva varausjakautuma muuttuu, mikä puolestaan muuttaa eristeeseen vaikuttavaa ulkoista kenttää.

3.1 Sähköinen polarisoituma

Palautetaan ensin mieleen, että sähköstatiikka hallitaan yhtälöillä

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (3.2)$$

Erityisesti on huomattava, että ρ sisältää *kaikki* varaukset eikä mitään jakoa “vapaisiin” ja “muihin” varauksiin tarvitse tehdä. Periaatteessa polarisoituma aine voidaan siis käsitellä varausjakaumien avulla.

Tarkastellaan polarisoituneen aineen pientä tilavuusalkiota ΔV , jonka dipolimomentti on $\Delta \mathbf{p}$. *Sähköinen polarisoituma* määritellään dipolimomenttien tiheytenä

$$\mathbf{P} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta V}. \quad (3.3)$$

Tämä määritelmä edellyttää, että ΔV on makroskooppisessa mielessä pieni. Varsinaisesta raja-arvosta $\Delta V \rightarrow 0$ ei ole kysymys, koska tilavuusalkiossa täytyy olla monta molekyyliä, jotta polarisaatio ylipäänsä syntyisi. Makroskooppiselta kannalta polarisoitumaa voi kuitenkin tarkastella jatkuvana paikan funktiona.

Polarisoituman SI-yksikkö on C m^{-2} , joten $[\mathbf{P}] = [\epsilon_0][\mathbf{E}]$. cgs-yksiköissä tyhjiön permittiivisyys on $1/4\pi$ siinä yksikköjärjestelmässä polarisoitumalla on sama yksikkö kuin sähkökentällä.

3.2 Polarisoituman aiheuttama sähkökenttä

Tarkastellaan pisteessä \mathbf{r}' sijaitsevan pienen eristealkion dV' dipolimomenttia $d\mathbf{p} = \mathbf{P} dV'$. Oletetaan, että korkeampien multipolien vaikutus voidaan jättää huomiotta. Vaihtoehtoisesti voidaan ajatella, että havaintopiste \mathbf{r} on niin etäällä, että tämän alkion aiheuttama sähköinen potentiaali saadaan laskemalla pelkän dipolimomentin potentiaali

$$d\varphi(\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')dV'}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (3.4)$$

Kokonaispotentiaali pisteessä \mathbf{r} on tämän integraali:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (3.5)$$

Mikäli polarisoituma tunnetaan, potentiaali voidaan laskea tästä suoraan. Käytännössä sama asia on hyödyllistä ilmaista hieman eri tavalla. Merkitään jälleen derivointia \mathbf{r}' :n suhteen ∇' :lla. Koska

$$\nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (3.6)$$

voidaan potentiaalin integrandi kirjoittaa muodossa

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right). \quad (3.7)$$

Käyttämällä kaavaa $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$ saadaan

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}'). \quad (3.8)$$

Tämän avulla ja soveltamalla divergenssiteoreemaa potentiaali voidaan ilmaista seuraavasti:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_0} \frac{(-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')) dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\oint_{S_0} \frac{\sigma_P(\mathbf{r}') dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_{V_0} \frac{\rho_P(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

missä S_0 on eristeen pinta.

Potentiaali voidaan siis laskea lausekkeista, jotka muistuttavat edellisessä luvussa olleita avaruus- ja pintavaraustiheyden integraaleja. Tämä on käytännön ongelmissa usein näppärin tapa laskea potentiaali. Suureita

$$\sigma_P \equiv \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (3.10)$$

$$\rho_P \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (3.11)$$

kutsutaan *polarisaatiovaraustiheyksiksi*. Niiden laatu on varaus/pinta-ala (σ_P) ja varaus/tilavuus (ρ_P) ja ne aiheuttavat potentiaalin φ , josta saadaan sähkökenttä $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ sekä eristeen sisä- että ulkopuolella. Nämä varaukset eivät ole samalla lailla “vapaita” kuin johteen varaukset, sillä ne riippuvat sekä sähkökentästä että eristeen ominaisuuksista. Tämän vuoksi polarisaatiovarauksia kutsutaan joskus näennäisiksi varauksiksi, mikä ei kuitenkaan tee niille täyttä oikeutta, kuten jatkossa tullaan huomaamaan.

Eriste on kokonaisuudessaan neutraali, joten kokonaispolarisaatiovaraus on

$$Q_P = \int_{V_0} (-\nabla \cdot \mathbf{P}) dV' + \oint_{S_0} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (3.12)$$

mikä seuraa suoraan divergenssiteoreemasta.

3.3 Sähkövuon tiheys

Edellä oletettiin eristeen polarisoituma \mathbf{P} tunnetuksi. Todellisuudessa näin ei yleensä ole, vaan polarisoituma syntyy vasteena ulkoiseen sähkökenttään. Tarkastellaan eristettä, jonka sisällä on mahdollisesti ulkoisia (“vapaita”) varauksia. Sovelletaan Gaussin lakia eristeen sisällä olevalla pinnalla S , joka sulkee sisäänsä niin ulkoiset varaukset kuin polarisaatiovarauksenkin:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} (Q + Q_P), \quad (3.13)$$

missä $Q = \sum_{i=1, \dots, N} q_i$ on ulkoisten varausten summa ja

$$Q_P = \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{P}) dV = - \oint_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.14)$$

on polarisaatiovaraus. Saadaan siis

$$\oint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} dS = Q \quad (3.15)$$

eli vektorin

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (3.16)$$

vuo suljetun pinnan läpi on sama kuin pinnan sulkemaan tilavuuteen sijoitettu ulkoinen varaus. Tätä vektoria kutsutaan *sähkövuon tiheydeksi* (joskus myös sähköiseksi siirtymäksi, engl. electric displacement). Käyttämällä taas divergenssiteoreemaa ja toteamalla, että $Q = \int_V \rho dV$, saadaan Gaussin laki eristeessä differentiaalimuotoon

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (3.17)$$

missä ρ on nyt *ulkoisten* varausten tiheys ja kokonaisvaraustiheys on $\rho + \rho_P$.

Sähköstatiikan peruslait on nyt siis puettu muotoon

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.18)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (3.19)$$

Etuna tässä on se, että ulkoinen varaus on helpommin hallittavissa kuin polarisaatiovaraus. Kuitenkin sähkökenttä \mathbf{E} on suure, joka loppujen lopuksi halutaan määrittää. Siksi on vielä tunnettava *rakenneyhtälö* $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$.

3.4 Dielektrisyys ja susceptiivisuus

Sähköinen polarisoituma aiheutuu sähkökentästä. Niiden välinen riippuvuus voidaan usein ilmaista *sähköisen susceptiivisuuden* $\chi(\mathbf{E})$ avulla:

$$\mathbf{P} = \chi(\mathbf{E})\mathbf{E}. \quad (3.20)$$

Susceptiivisuus $\chi(\mathbf{E})$ määräytyy väliaineen mikroskooppisesta rakenteesta ja voi olla myös paikan funktio ($\chi(\mathbf{r}, \mathbf{E})$). Yleisesti $\chi(\mathbf{E})$ on tensori, jolloin polarisoituma ei välttämättä ole samansuuntainen kuin sähkökenttä eli eriste voi olla epäisotrooppista. Tällaisia väliaineita ovat esimerkiksi kide-rakenteet tai vapaista varauksista koostuva magnetoitunut plasma, joissa epäisotropia aiheuttaa kahtaistaittavuutta. Tällöin eri tavoin polarisoituneet sähkömagneettiset aallot taittuvat eri tavoin. Väliaineissa, joissa $\chi(\mathbf{E})$ todella on sähkökentän funktio, \mathbf{P} riippuu sähkökentästä epälineaarisesti. Tämä ilmiö esiintyy yleensä vain hyvin voimakkailla sähkökentillä. Kaikissa aineissa ei edes ole suoraa relaatiota \mathbf{P} :n ja \mathbf{E} :n välillä. Ferrosähköisissä aineissa polarisoitumaa on myös ilman ulkoista sähkökenttää.

Tarkastellaan nyt vain isotrooppisia eristeitä, joille $\chi(\mathbf{E})$ on skalaari ja rajoitutaan lineaarisiin väliaineisiin, joille χ on sähkökentästä riippumaton suure, mutta saa olla edelleenkin paikan funktio. Tällöin vallitsevat rakenneyhtälöt

$$\mathbf{P} = \chi\mathbf{E} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \quad (3.22)$$

missä *permittiivisyys* $\epsilon = \epsilon_0 + \chi$ voi siis olla paikan funktio. Laadutonta suuretta

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0} \quad (3.23)$$

kutsutaan väliaineen *eristevakioksi*, *dielektrisyysvakioksi* tai *suhteelliseksi permittiivisyydeksi*.

Riittävän suuri kenttä repii elektroneja ulos molekyyleistä, jolloin aine alkaa johtaa sähköä. Tätä rajaa kutsutaan aineen dielektriseksi vahvuudeksi tai *läpilyöntikestävyudeksi*. Taulukossa 3.1 on joidenkin aineiden eristevakioita ja dielektrisiä vahvuuksia. Ilma on sähköisesti hyvä eriste. Veden eristevakio on taas suuri, mikä merkitsee vahvaa polarisoitumista ja siten kohtuullisen hyvää sähkönjohtokykyä polarisoitumisvarausten kantamana.

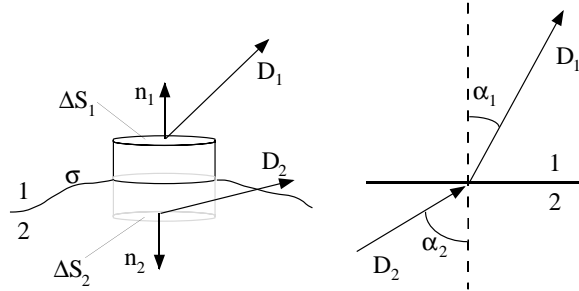
aine	ϵ_r	E_{max} [MV m ⁻¹]
akryyli	3,3	20
eboniitti	2,7	10
kuiva ilma	1,0006	4,7
lasi	5–10	15
kova paperi	5	15
eristyspaperi	5	30
posliini	5,5	35
tislattu vesi	81	30

Taulukko 3.1: Eristeiden ominaisuuksia. Tässä annettu ilman läpilyöntikestävyys E_{max} koskee kuivaa ilmaa, muissa oloissa arvo on pienempi. Lasin suhteellinen permittiivisyys vaihtelee kemiallisesta koostumuksesta riippuen.

3.5 Sähkökenttä rajapinnalla

Eristeet ovat usein paljon hankalampia käsiteltäviä kuin johteet. Hyvän johteen ominaisuus on, että sen sisäinen sähkökenttä on nolla ja kaikki varaus kertyy pinnalle. Eristeet sen sijaan polarisoituvat eli niiden sisällä $\mathbf{E} \neq 0$, ja erilaiset eristeet polarisoituvat eri tavoin. Eristeongelmissa joudutaan usein tarkastelemaan kenttien ominaisuuksia eri eristeiden tai eristeiden ja johteiden rajapinnoilla.

Tarkastellaan tilannetta kahden *yksinkertaisen* (lineaarinen, isotrooppinen, homogeeninen = LIH) eristeen rajapinnalla ja oletetaan rajapinta makroskooppisessa mielessä ohueksi. Tämä tarkastelu voidaan ulottaa myös epähomogeenisiin eristeisiin, jos eriste voidaan kuvata eri eristevakiolla varustettuina kerroksina. Merkitään väliaineita indekseillä 1 ja 2 ja olkoon



Kuva 3.1: Pillerirasia kahden väliaineen rajapinnalla ja sähkövuon tiheyden taittumiskulmien määrittely.

σ pintavaraustiheys rajapinnalla. Tarkastellaan pientä sylinterinmuotoista pillerirasiaa, jonka kannet ovat eri väliaineissa (kuva 3.1).

Sovelletaan Gaussin lakia

$$\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \Delta S_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \Delta S_2 + \oint_{\text{vaippa}} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = Q. \quad (3.24)$$

Annetaan pillerirasian korkeuden lähestyä nollaa. Tällöin integraali vaipan yli on nolla ja pillerirasian sisällä oleva varaus on pintavaraus kerrottuna pinta-alalla: $Q = \sigma \Delta S$, missä $\Delta S = \Delta S_1 = \Delta S_2$. Koska $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$, voidaan kirjoittaa *reunaehto* sähkövuon tiheyden normaalikomponentille:

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}_2 = \sigma \quad (3.25)$$

tai

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \quad (3.26)$$

Mikäli kahden eristeen rajapinnalla ei ole ulkoista varausta, sähkövuon tiheyden normaalikomponentti on jatkuva rajapinnan läpi. Koska eristeet polarisoituvat, on tarkasteltava nimenomaan sähkövuon tiheyttä eikä sähkökenttää.

Myös sähköstaattiselle kentälle löytyy reunaehto rajapinnalla. Koska $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$, niin viivaintegraali

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.27)$$

pitkin mitä tahansa suljettua silmukkaa. Sovelletaan tätä suorakulmaiseen silmukkaan $ABCD$ eristeiden rajapinnalla. Olkoot rajapinnan suuntaiset sivut AB ja CD kumpikin eri väliaineessa ja pituudeltaan Δl . Väliaineesta toiseen kulkevat sivut BC ja DA oletetaan häviävän lyhyiksi. Tällöin

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \Delta \mathbf{l} = 0, \quad (3.28)$$

joten

$$E_{2t} = E_{1t} \quad (3.29)$$

eli sähkökentän tangentialikomponentti on jatkuva rajapinnan yli. Tämä tulos on voimassa riippumatta mahdollisesta pintavarauksesta.

Tutkitaan sitten vektorin \mathbf{D} taittumista rajapinnalla tapauksessa $\sigma = 0$. Olkoon α_1 vektorin \mathbf{D}_1 ja \mathbf{n}_1 :n välinen kulma ja α_2 vektorin \mathbf{D}_2 ja \mathbf{n}_2 :n välinen kulma. Koska väliaineet on oletettu yksinkertaisiksi, niin

$$D_{1t} = \epsilon_1 E_{1t} ; D_{2t} = \epsilon_2 E_{2t} . \quad (3.30)$$

Tällöin

$$\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} = \frac{D_{2t} D_{1n}}{D_{2n} D_{1t}} = \frac{\epsilon_2 E_{2t}}{\epsilon_1 E_{1t}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}} \quad (3.31)$$

Sähkövuon tiheysvektori taittuu siis pois päin normaalin suunnasta mentäessä huonommasta parempaan eristeeseen. Tämä on sukua aaltojen taittumiselle eri väliaineiden rajapinnalla, johon tutustutaan luvussa 11.

Tarkastellaan sitten potentiaalin reunaehto rajapinnalla. Oletetaan jälleen $\sigma = 0$, jolloin $D_{2n} = D_{1n}$ ja $\epsilon_{r2}\epsilon_0 E_{2n} = \epsilon_{r1}\epsilon_0 E_{1n}$. Koska $E_n = -\partial\varphi/\partial n$, tulee reunaehdoksi

$$\epsilon_{r2} \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \epsilon_{r1} \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} . \quad (3.32)$$

Tämän lisäksi φ on jatkuva reunan yli. Tämä nähdään tarkastelemalla kahta pistettä r_1 ja r_2 reunan molemmiin puolin. Tällöin

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \varphi_1 - \varphi_2 \rightarrow 0 , \quad (3.33)$$

kun r_1 ja r_2 lähestyvät toisiaan eri puolilta rajapintaa sillä fysikaalisella oletuksella, että sähkökenttä on äärellinen rajapinnalla.

3.5.1 Eristepallo sähkökentässä

Yksinkertaisessa väliaineessa $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, joten $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon$. Ainoa muodollinen ero edellisten lukujen käsittelyyn on korvata $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$. Useissa käytännön ongelmissa eristeessä ei ole ulkoista varausta, joten $\nabla^2\varphi = 0$ koko eristeessä. Tarkastellaan a -säteistä eristepalloa homogeenisessa sähkökentässä \mathbf{E}_0 . Ratkaisumenetelmä on samanlainen kuin johdepallon tapauksessa. Valitaan z -akseli alkuperäisen sähkökentän suuntaiseksi: $\mathbf{E}_0 = E_0\mathbf{e}_z$, jolloin kaukana pallosta $\varphi = -E_0 r \cos\theta$. Asetetaan origo pallon keskipisteeseen ja todetaan kiertosymmetria z -akselin suhteen: $\varphi = \varphi(r, \theta)$. ϵ_r on vakio eristeessä ja $\epsilon = \epsilon_0$ muualla. Ilman ulkoisia varauksia $\rho = 0$ kaikkialla ja Laplacen yhtälö on voimassa eristeessä ja sen ulkopuolella. Kirjoitetaan ratkaisu jälleen vyöhykeharmonisten funktioiden sarjana (2.80):

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + B_n r^{-(n+1)} \right) P_n(\cos\theta) . \quad (3.34)$$

Merkitään termejä pallon ulkopuolella ($r > a$) indeksillä 1 ja sisäpuolella ($r < a$) indeksillä 2. Etäällä pallosta ratkaisu lähenee alkuperäistä potentiaalia $-E_0 r \cos \theta$, joten pallon ulkopuolella

$$A_{1n} = 0, \text{ kun } n \geq 2; A_{11} = -E_0,$$

jolloin

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} B_{1n} r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) - E_0 r \cos \theta. \quad (3.35)$$

Pallon sisällä potentiaalin on oltava äärellinen origossa, joten kaikki kertoimet B_{2n} ovat nollia ja sisäratkaisu on muotoa

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} r^n P_n(\cos \theta). \quad (3.36)$$

Käytetään sitten potentiaalin reunaehtoja rajapinnalla. Potentiaalin on oltava jatkuva eli $\varphi_1(a, \theta) = \varphi_2(a, \theta)$, joten

$$\begin{aligned} -E_0 a \cos \theta + \frac{B_{10}}{a} + \frac{B_{11}}{a^2} \cos \theta + \frac{B_{12}}{a^3} P_2(\cos \theta) + \dots \\ = A_{20} + A_{21} a \cos \theta + A_{22} a^2 P_2(\cos \theta) + \dots \end{aligned} \quad (3.37)$$

Toisaalta potentiaalin derivaatan reunaehdosta

$$\left. \frac{\partial \varphi_1(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=a} = \epsilon_r \left. \frac{\partial \varphi_2(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=a}$$

seuraa

$$\begin{aligned} -E_0 \cos \theta - \frac{B_{10}}{a^2} - \frac{2B_{11}}{a^3} \cos \theta - \frac{3B_{12}}{a^4} P_2(\cos \theta) + \dots \\ = \epsilon_r A_{21} \cos \theta + 2\epsilon_r A_{22} a P_2(\cos \theta) + \dots \end{aligned} \quad (3.38)$$

Koska Legendren polynomit muodostavat ortonormaalin kannan, kunkin P_n -termin täytyy toteuttaa yhtälöt erikseen. Nyt molemmat yhtälöt (3.37) ja (3.38) toteutuvat vain, jos $A_{2n} = 0$ ja $B_{1n} = 0$ kaikilla $n \geq 2$. Yhtälön (3.38) ainoa $\cos \theta$:sta riippumaton termi on $B_{10} = 0$, joka sijoitettuna yhtälöön (3.37) antaa $A_{20} = 0$ ja jäljelle jää yhtälöpari

$$-E_0 a + \frac{B_{11}}{a^2} = A_{21} a \quad (3.39)$$

$$-E_0 - \frac{2B_{11}}{a^3} = \epsilon_r A_{21}, \quad (3.40)$$

joiden ratkaisuna saadaan

$$A_{21} = -\frac{3E_0}{\epsilon_r + 2}; B_{11} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 a^3. \quad (3.41)$$

Kaiken kaikkiaan ratkaisu pallon ulkopuolella on

$$\varphi_1(r, \theta) = - \left(1 - \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{a^3}{r^3} \right) E_0 r \cos \theta \quad (3.42)$$

ja pallon sisällä

$$\varphi_2(r, \theta) = - \frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0 r \cos \theta = - \frac{3}{\epsilon_r + 2} E_0 z. \quad (3.43)$$

Pallon sisällä on siis vakiokenttä $\mathbf{E}_2 = 3 \mathbf{E}_0 / (\epsilon_r + 2)$, mikä on erona johdepalloon, jossa pintavaraukset kumoavat sisäkentän. Koska $\epsilon_r \geq 1$, niin kenttä eristeen sisällä on pienempi kuin ulkopuolella. Eristepallon aiheuttama häiriö pallon ulkopuolella on dipolikenttä. Sähkövuon tiheydellä ei ole lähteitä, vaan kaikki kenttäviivat jatkuvat pallon läpi. Sitä vastoin polarisoitumisesta johtuva pintavaraukate aiheuttaa sen, että sähkökentällä on lähteitä ja nieluja pallon pinnalla eli osa kenttäviivoista päättyy pallon pinnalle. Siksi kenttäviivat eivät myöskään ole kohtisuorassa pallon pintaa vastaan. Tämä osoittaa, että polarisaatiovarauksen kutsuminen näennäiseksi on kyseenalaista.

3.5.2 Pistevaraus eristepinnan lähellä

Jakakoon xy -taso avaruuden kahteen homogeeniseen eristealueeseen: ($z > 0, \epsilon_1$) ja ($z < 0, \epsilon_2$). Asetetaan varaus q pisteeseen $(0, 0, d)$ alueeseen 1. Oletetaan, ettei rajapinnalla ole ulkoisia varauksia. Tehtävänä on laskea potentiaali koko avaruudessa. Helpoimmalla päästään kuvalähteiden avulla. Maadoitetun johdetason tapauksessa ongelma ratkesi peilikuvavarauksella $-q$ pisteessä $(0, 0, -d)$. Eristeenkin tapauksessa potentiaali alueessa 1 yritetään esittää varauksen q ja jonkin *alueessa 2* sijaitsevan kuvavarauksen q' avulla. Sivistynyt arvaus on sijoittaa kuvavarauksen q' pisteeseen $z = -d$, jolloin potentiaali *alueessa 1* on sylinterikoordinaateissa lausuttuna Poissonin yhtälön toteuttava

$$\varphi_1(r, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{q}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + (z+d)^2}} \right). \quad (3.44)$$

Kiertosymmetrian vuoksi kannattaa käyttää sylinterikoordinaatistoa, mutta tehtävä ratkeaisi sujuvasti myös karteesisessa koordinaatistossa.

Alue 2 on eriste, joten johdetilanteesta poiketen sielläkin on kenttä. Koska alueessa 2 ei ole varauksia, potentiaali toteuttaa Laplacen yhtälön. Aina-kin laskennallisesti kelvollinen ratkaisu alueessa 2 saadaan *alueessa 1* sijaitsevan kuvavarauksen q'' avulla, joka viisaasti sijoitetaan pisteeseen $z = d$. Tällöin potentiaali *alueessa 2* on

$$\varphi_2(r, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q''}{\sqrt{r^2 + (z-d)^2}}. \quad (3.45)$$

Mikäli kuvavarausten suuruudet saadaan sovitetuiksi siten, että reunaehdot toteutuvat, niin ongelma on ratkaistu. Reunaehtojen mukaan sähkövuon tiheyden z -komponentti on jatkuva rajapinnalla (ei pintavarausta) samoin kuin sähkökentän r -komponentti. Jälkimmäinen on yhtäpitävää sen kanssa, että potentiaali on jatkuva. Näin saadaan yhtälöpari

$$\begin{aligned} q - q' &= q'' \\ \frac{1}{\epsilon_1}(q + q') &= \frac{1}{\epsilon_2} q''. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Kuvavaraukset ovat siten

$$\begin{aligned} q' &= -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} q \\ q'' &= \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_2 + \epsilon_1} q. \end{aligned} \quad (3.47)$$

HT: Laske polarisoitumaan liittyvä varaustiheys aineiden rajapinnalla. Jos väliaine 2 on johde, niin ratkaisu saadaan muodollisesti asettamalla ϵ_2 äärettömäksi, jolloin potentiaali alueessa 2 häviää ja $q' = -q$.

Viimeistään reunaehtoja sovellettaessa tuli selväksi, että kuvälähteet kannatti sijoittaa nimenomaan pisteisiin $z = -d$ ja $z = d$. Paikkariippuvuudet supistuvat silloin pois reunaehtoyhtälöistä. Kuvälähteet ovat vain kuvitteellisia apuvälineitä, jotka eivät oikeasti sijaitse missään. Kun ratkaisu on löydetty, kuvälähteet voidaan unohtaa ja todeta saaduista lausekkeista, että kaikki vaadittavat yhtälöt reunaehtoineen toteutuvat.

3.6 Molekulaarinen polarisoituvuus¹

Tarkastellaan yksinkertaista väliainetta, jossa yksittäisen molekyylin dipolimomentti \mathbf{p}_m on verrannollinen polarisoivaan sähkökenttään \mathbf{E}_m :

$$\mathbf{p}_m = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}_m. \quad (3.48)$$

Suuretta α kutsutaan polarisoituvuudeksi (yksikkö m^3). Oletetaan, ettei molekyylillä ole pysyvää dipolimomenttia. Tavoitteena on lausua molekyylin polarisoituvuus makroskooppisesti mitattavien suureiden avulla. Polarisoiva sähkökenttä on kenttä, jonka aiheuttavat kaikki ulkoiset lähteet ja väliaineen polarisoituneet molekyylit lukuunottamatta tarkasteltavaa molekyyliä itseään. Poistetaan makroskooppisesti pieni, mutta mikroskooppisesti suuri palanen ainetta molekyylin ympäriltä ja lasketaan kenttä jäljelle jäävässä onkalossa. Kenttä molekyylin kohdalla on silloin

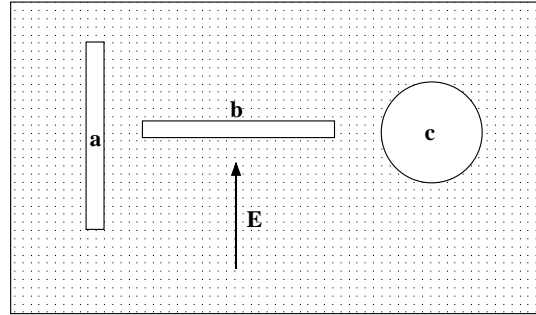
$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_{near}. \quad (3.49)$$

¹Tämä jakso ei ole kurssin ydinainesta, mutta sisältää tietoja, joista voi olla hyötyä joskus myöhemmin.

Tässä \mathbf{E} on keskimääräinen kenttä koko kappaleessa, \mathbf{E}_p onkalon pinnan polarisaatiovarauksen aiheuttama kenttä ja \mathbf{E}_{near} on onkalossa olevien kaikkien muiden molekyylien aiheuttama kenttä. Aivan tarkasteltavan molekyylin kohdalla on siis otettava huomioon aineen yksityiskohtainen rakenne.

Kenttä \mathbf{E}_{near} on nolla esimerkiksi säännöllisen kuutiohilan hilapisteissä, jos molekyylien dipolimomenttivektorit ovat identtisiä. Samoin voidaan olettaa \mathbf{E}_{near} nolllaksi nesteissä ja kaasuissa, joissa molekyylit ovat täysin satunnaisesti jakautuneita. Useista molekyylyitypeistä koostuvissa aineissa se voi kuitenkin poiketa nolllasta. Jatkossa oletetaan, että $\mathbf{E}_{near} = 0$.

Kenttä \mathbf{E}_p riippuu onkalon muodosta (kuva 3.2). Jos se on kapean suorakaiteen muotoinen ja pitkä sivu on kentän \mathbf{E} suuntainen (a), niin kenttä on onkalossa sama kuin väliaineessa kentän tangentialikomponentin jatkuvuuden perusteella. Jos suorakaidetta käännetään 90 astetta (b), niin onkalossa $\mathbf{E}_b = \mathbf{E} + \mathbf{P}/\epsilon_0$ sähkövuon tiheyden normaalikomponentin jatkuvuuden vuoksi (pinnoilla on polarisaatiovarausta, mutta ei vapaata varausta).



Kuva 3.2: Sähkökentän määrittäminen erilaisissa onkaloissa.

Luonnolliselta tuntuva vaihtoehto on olettaa onkalo palloksi (c). Kenttä onkalossa saadaan vähentämällä tasaisesti polarisoituneen pallon kenttä kentästä \mathbf{E} . Voidaan käyttää hyväksi analogiaa tilanteeseen, jossa tasaisesti polarisoituneen pallon sisällä on vakiokenttä $-\mathbf{P}/(3\epsilon_0)$, ja onkalossa $\mathbf{E}_m = \mathbf{E} + \mathbf{P}/(3\epsilon_0)$. Tämä on jonkinlainen välimuoto suorakaiteen muotoisten onkaloiden kentistä.

Jos molekyylien lukumäärätiheys on n , polarisoituma on määritelmän mukaan $\mathbf{P} = n\mathbf{p}_m$, joten

$$\mathbf{P} = n\alpha\epsilon_0(\mathbf{E} + \mathbf{P}/(3\epsilon_0)). \quad (3.50)$$

Toisaalta $\mathbf{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0\mathbf{E}$, joten saadaan *Clausiuksen ja Mossottin yhtälö*:

$$\alpha = \frac{3(\epsilon_r - 1)}{n(\epsilon_r + 2)}, \quad (3.51)$$

jossa ϵ_r ja n ovat makroskooppisia suureita. Voidaan esimerkiksi mitata kaasun ϵ_r ja n , jolloin saadaan α laskemalla. Jos polarisoitumismekanismi on samanlainen myös nesteessä, voidaan tunnettujen tiheyksien avulla ennustaa sen suhteellinen permittiivisyys. Näin saadaan varsin hyviä tuloksia esimerkiksi aineille CS_2 , O_2 ja CCl_4 . Vedelle tulisi vastaavalla tavalla ennusteeksi negatiivinen permittiivisyys, joten pysyvästi polarisoituneelle aineelle esitetty malli ei päde.

Pysyvän polarisaation \mathbf{P}_0 tapauksessa ulkoisen kentän ollessa nolla $\mathbf{E}_m = \mathbf{P}_0/(3\epsilon_0)$, joten on oltava $n\alpha = 3$. Useimmilla aineilla $n\alpha/3 < 1$, joten ne käyttäytyvät kuten tavalliset eristeet. Jotkin kristallirakenteiset kiinteät aineet kuitenkin toteuttavat ehdon ja niitä kutsutaan ferroelektriksi materiaaleiksi. Esimerkiksi BaTiO_3 on ferroelektristä alle 120°C :n lämpötilassa (Feynman Lectures, osa II, luku 11-7).

Pysyvästi polarisoitunut kappale (elektretti) on kestopagneetin sähköinen vastine. Se eroaa kuitenkin magneetista ratkaisevasti, koska elektretin pinnalle "sataa" vähitellen väliaineesta varauksia, jotka neutralisoivat polarisaatiopintavarauksen. Ferroelektrisyydelle ominainen pysyvä polarisoituvuus aiheuttaa *hystereesi-ilmiön*. Kun aine on kerran polarisoitu tasolle P , niin polarisaatio ei katoa viettäessä sähkökenttä nolnaan, vaan vasta selvästi nollan alapuolella. Kasvatettaessa negatiivista sähkökenttää polarisaatio saavuttaa uudelleen uuden tason $-P$, josta ei puolestaan päästä eroon kasvattamalla sähkökenttä nolnaan, vaan kenttää on kasvatettava riittävän paljon nollan yläpuolelle. Polarisaation ja sähkökentän välinen yhteys ei siten ole yksikäsitteinen. Vastaavaan ilmiöön tutustutaan myöhemmin paljon yleisemmän ilmiön *ferromagnetismin* yhteydessä.