

## Luku 2

# Staattinen sähkökenttä

Tässä luvussa tutustutaan sähkövarausten aiheuttamaan staattiseen sähkökenttään. Asia on tuttua peruskursseilta, mutta seuraavassa laskennallinen käsittely on huomattavasti järeämpää. Nyt kannattaa olla kärsivällinen, sillä hyvin opittu sähköstatiikka helpottaa jatkossa magnetostatiikan omaksumista. Tässä luvussa opitaan myös ratkaisemaan potentiaaliongelmia menetelmillä, joista on hyötyä muillakin fysiikan aloilla. *Samoilla yhtälöillä on samat ratkaisut*, esiintyivätpä ne sitten sähköopissa, virtausmekaniikassa, lämpöopissa tai kvanttifysiikassa!

### 2.1 Sähkövaraus ja Coulombin laki

Maaikmankaikkeudessa on tietty määrä positiivisia ja negatiivisia sähkövarauksia. Nykyluetämyksen mukaan niitä ei voida hävittää eikä luoda. Minikään suljetun systeemin varausten määrä ei siis voi muuttua. Käytännössä useimmat systeemit ovat neutraaleja, eli niissä on yhtä paljon positiivisia ja negatiivisia varauksia. Makroskooppisen kokonaisuuden varauksella tarkoitetaan yleensä sen nettovarausta eli poikkeamaa neutraalisuudesta. Nettovaraus säilyy, ellei systeemi ole vuorovaikutuksessa ympäristönsä kanssa.

1700-luvun lopulla oli opittu, että varauksia on kahta lajia, joita nykyisin kutsutaan positiivisiksi ja negatiivisiksi. Charles Augustin de Coulomb muotoili kokeisiinsa perustuen lain:

*Kaksi pistevarausta vaikuttavat toisiinsa voimilla, joiden suunta on niitä yhdistävän suoran suuntainen ja kääntäen verrannollinen varauksen välisen etäisyyden neliöön. Voimat ovat verrannollisia varauksen tuloon siten, että samanmerkkiset varaukset hylkivät toisiaan ja erimerkkiset vetävät toisiaan puoleensa.*

Fyysikkoslangissa puhutaan varauksista, vaikka parempi termi olisi “varauksellinen hiukkanen”.

Nykyaikaisin merkinnöin kirjoitettuna *Coulombin laki* kertoo, että varaus  $q_2$  vaikuttaa varaukseen  $q_1$  *sähköstaattisella voimalla*

$$\mathbf{F}_1 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}, \quad (2.1)$$

missä  $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  on varauksesta  $q_2$  varaukseen  $q_1$  osoittava vektori<sup>1</sup>. Sähköstaattinen vuorovaikutus noudattaa *voiman ja vastavoiman lakia*. Jos varaukset liikkuvat, tilanne muuttuu monimutkaisemmaksi, mutta siihen palataan myöhemmin.

Jos varauksia on useita, varaukseen  $q_i$  vaikuttaa voima

$$\mathbf{F}_i = k \sum_{j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij}. \quad (2.2)$$

Tämä laki ilmaisee myös voimien kokeellisesti oikeaksi todetun yhteenlaskuperiaatteen eli *superpositioperiaatteen*.

Coulombin laki edellyttää vuorovaikutuksen välittymistä äärettömän nopeasti koko avaruuteen. Tämä on approksimaatio, koska mikään tieto ei etene tyhjiössä valoa nopeammin. Toisaalta valonnopeuden suuren arvon vuoksi staattisuus on aivan kelvollinen oletus monissa käytännön tilanteissa.

Verrannollisuuskerroin  $k$  riippuu käytetystä yksikköjärjestelmästä. Sähköopissa käytetään yhä usein cgs-yksiköitä (Gaussin yksiköitä), joissa  $k = 1$ . Tällöin varauksen yksikkö määritellään siten, että se aiheuttaa 1 cm etäisyydellä 1 dynen voiman (1 dyn =  $10^{-5}$  N) toiseen yksikkövaraukseen. Me käytämme SI-yksiköitä eli MKSA-järjestelmää, jossa

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (2.3)$$

missä  $\epsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$  on *tyhjiön permittiivisyys*. Täten kertoimen numeroarvo on  $k \approx 8,9874 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$  (muistisääntö:  $9 \cdot 10^9$  SI-yksikköä). Näissä yksiköissä sähkövirta on perussuure. Palataan siihen tuonnempana, mutta todettakoon tässä, että virran SI-yksikkö on ampeeri (A) ja varauksen yksikkö coulombi (C = As).  $\epsilon_0$ :n yksikkö on faradi/metri ( $\text{F m}^{-1} = \text{C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$ ).

Coulombin laki perustuu kokeellisiin havaintoihin ja voisi siten olla esimerkiksi  $1/r^2$ -riippuvuuden osalta vain likimääräinen tulos. Kuten jo aiemmin todettiin modernin fysiikan teoreettiset perusteet ja erittäin tarkat

<sup>1</sup>Vektoreita merkitään lihavoiduilla symboleilla. Myös käsin kirjoitettaessa kuuluu fysiikassa hyviin tapoihin erottaa selvästi vektorit skalaareista vaikka piirtämällä viiva symbolin yläpuolelle tai mato sen alle. Matemaatikot eivät aina tällaisista tavoista piittaa.

mittaukset viittaavat siihen, että  $1/r^2$ -riippuvuus on täsmällinen luonnonlaki. Myös painovoima riippuu etäisyydestä kuten  $1/r^2$ , mutta on olemassa vain yhdenmerkkistä massaa. Lisäksi se on paljon sähköstaattista voimaa heikompi.

**HT:** Vertaa kahden elektronin välistä sähköstaattista ja gravitaatiovoimaa toisiinsa.

Tarkastellaan sitten varausta itseään. Mitattavissa oleva varaus on kvantittunut yhden elektronin varauksen suuruisiin kvantteihin. Makroskooppisessa mielessä alkeisvaraus on erittäin pieni ( $e \approx 1,6019 \cdot 10^{-19}$  C). Kvarkeilla on  $\pm 1/3$  ja  $\pm 2/3$   $e$ :n suuruisia varauksia, mutta ne näyttävät olevan aina sidottuja toisiinsa siten, että kaikkien alkeishiukkasten varaukset ovat  $\pm e$ :n monikertoja ja elektronin varaus on siten pienin luonnossa vapaana esiintyvä varaus.

**HT:** Kertaa peruskurssilta Millikanin koe.

	varaus [C]
elektroni	$1,6019 \cdot 10^{-19}$
pieni kondensaattori	$10^{-7}$
1 A virta sekunnissa	1
salamaniskun kuljettama varaus	1–100
auton akusta saatavan virran kuljettama varaus	$10^5$
maanpinta	$10^6$

Taulukko 2.1: Sähkövarausten suuruuksia ja suuruusluokkia. **HT:** Mieti, mikä ylläpitää maanpinnan varausta.

Yksikkövarauksen pienuudesta johtuen makroskooppinen varausjakautuma muodostuu yleensä suuresta joukosta alkeisvarauksia (ks. taulukko 2.1). Näinollen *varaustiheys* on hyödyllinen käsite. Kolmiulotteisessa avaruudessa se määritellään muodollisesti

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \quad (2.4)$$

ja *pintavaraustiheys* vastaavasti

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}, \quad (2.5)$$

missä  $V$  on tarkasteltava tilavuus ja  $S$  tarkasteltava pinta. Jos tilavuudessa  $V$  on varausjakautuma  $\rho$  ja pinnalla<sup>2</sup>  $S$  pintavarausjakautuma  $\sigma$ , niin pisteessä  $\mathbf{r}$  olevaan varaukseen  $q$  vaikuttaa voima

$$\mathbf{F}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV' + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') dS'. \quad (2.6)$$

<sup>2</sup>Tilavuutta  $V$  rajoittavaa pintaa (tilavuuden reunaan) merkitään usein  $\partial V$ . Muista aina, että tärkeämpää kuin käytetyt merkinnät on yhtälöiden kuvaama fysiikka!

## 2.2 Sähkökenttä

Sähköstaattinen vuorovaikutus on luontevaa ajatella kaksivaiheiseksi: staattinen systeemi aiheuttaa kentän  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , joka vaikuttaa pisteessä  $\mathbf{r}$  olevaan varaukselliseen hiukkaseen (varaus  $q$ ) voimalla

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (2.7)$$

joka voidaan mitata. Sähköstatiikalle tyypillinen kokeellinen ongelma on, että kenttään tuodaan ylimääräinen varattu kappale. Se voi vaikuttaa huomattavasti siihen varausjakaumaan, joka aiheuttaa kentän. Sanotaan, että kappaleet *polarisoituvat*. Tämän vuoksi useat oppikirjat puhuvat pienistä *testivarausista*, jotka eivät vaikuta kentän aiheuttajaan. Sähkökentän voimakkuuden määritelmä ei kuitenkaan edellytä testivaruksen käsitettä.

**HT:** Kuinka painovoima eroaa tässä suhteessa sähköstaattisesta voimasta?

Yksittäisten varausten ja varausjakautumien yhteenlaskettu sähkökenttä on voimien yhteenlaskuperiaatteen nojalla

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dV' \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \sigma(\mathbf{r}') dS'. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Tässä vaiheessa on syytä tehdä itselleen kristallin kirkkaaksi lausekkeessa esiintyvien vektorimuuttujien merkitykset. Vektori  $\mathbf{r}$  on kentän  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  havainnointipiste. Vektori  $\mathbf{r}'$  käy läpi kaikki jatkuvan varausjakauman pisteet eli se on integroimisumuuttuja.  $\mathbf{r}_i$  on puolestaan yksittäisen pistevarauksen paikka.

Yksittäiset pistevaraukset voidaan käsitellä samalla tavalla kuin varausjakautumat ottamalla käyttöön *Diracin deltafunktio*  $\delta(\mathbf{r})$ , jolloin pisteessä  $\mathbf{r}_i$  olevaan varaukseen  $q_i$  liittyvä varaustiheys on  $\rho(\mathbf{r}) = q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ . Deltafunktion tutuiksi oletettuja perusominaisuuksia ovat

$$\delta(\mathbf{r}) = 0, \quad \text{jos } \mathbf{r} \neq 0 \quad (2.9)$$

$$\int F(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = F(\mathbf{r}_0). \quad (2.10)$$

Periaatteessa sähkökenttä voidaan siis määrittää laskemalla kaikkien varausjakautumien ja yksittäisten hiukkasten aiheuttamat kentät. Käytännössä tämä on usein täysin ylivoimainen tehtävä. Faraday otti käyttöön *kenttäviivan* käsitteen. Vektorikentän kenttäviiva on matemaattinen käyrä, joka on jokaisessa pisteessä kyseisen vektorin suuntainen. Kenttäviiva on määriteltä, kun sen aloituspiste on valittu, ja se jatkuu äärettömän kauas, ellei sitä ennen törmätä pistevaraukseen, joka on kenttäviivan päätepiste. Parhaiten

kenttäviiva soveltuu divergenssittömän kentän kuten magneettikentän kuvaamiseen, koska silloin kenttäviivojen tiheys kuvaa kentän voimakkuutta, jos kenttäviivojen aloituspisteet valitaan sopivasti. Sähkökentänkin tapauksessa kenttäviivaesitystä voi käyttää, jos haluaa. On kuitenkin muistettava, että kenttäviiva ei ole itsenäinen fysikaalinen olio vaan ainoastaan tapa havainnollistaa vektorikenttää, joka on varsinainen fysikaalinen suure.

## 2.3 Sähköstaattinen potentiaali

Vektorianalyysin alkeista tiedetään, että

$$\nabla \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 0, \quad (2.11)$$

joten staattisen sähkökentän roottori häviää:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.12)$$

Sähkökenttä voidaan siis esittää *sähköstaattisen potentiaalin*  $\varphi$  avulla:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}). \quad (2.13)$$

Pisteessä  $\mathbf{r}_1$  sijaitsevan hiukkasen aiheuttama potentiaali on siten

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}, \quad (2.14)$$

kun sovitaan, että potentiaali häviää äärettömydessä. Vastaavasti mielivaltaiselle varausjoukolle saadaan

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'. \quad (2.15)$$

Sähköstaattinen kenttä on esimerkki *konservatiivisesta* voimakentästä. (**HT:** Kertaa konservatiivisen voiman käsite klassisen mekaniikan kurssilta.) Tämä merkitsee, että *potentiaalienergia*  $U$  eli voiman  $\mathbf{F}$  viivaintegraali annetusta vertailupisteestä  $\mathbf{r}_0$  tarkastelupisteeseen  $\mathbf{r}$

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (2.16)$$

on riippumaton integrointitiestä. Koska itse fysikaalinen suure sähkökenttä riippuu vain potentiaalin derivaatasta, potentiaalin nollakohdan voi valita mieleisekseen. Standardivalinta on, että potentiaali häviää äärettömydessä, mutta joskus, kuten ärettömän pitkän langan tapauksessa, jolloin potentiaali

divergoi äärettömyydessä, tätä valintaa ei voi käyttää. Asettamalla  $\varphi(\mathbf{r}_0) = 0$  saadaan  $U(\mathbf{r}) = q\varphi(\mathbf{r})$ .

Potentiaalin käsitteestä on suurta hyötyä erilaisissa sähkökenttään liittyvissä ongelmissa. Tämä johtuu osaksi siitä, että sähkökentän (vektorikenttä) integroiminen varausjakautumista on monimutkaisempi tehtävä kuin yksinkertaisemman potentiaalin (skalaarikenttä) laskeminen. Potentiaali on vielä derivoitava, mutta se on helpompaa kuin integrointi. Merkittävä syy potentiaalin käyttökelpoisuudelle on myös se, että matematiikan potentiaaliteoria tarjoaa koko joukon hyödyllisiä apuneuvoja.

SI-järjestelmässä voiman yksikkö on newton (N) ja varauksen yksikkö on coulombi (C), joten sähkökentän yksikkö on  $\text{N C}^{-1}$ . Energian yksikkö on puolestaan joule ( $\text{J} = \text{N m}$ ) eli sähköstaattisen potentiaalin yksikkö on siten  $\text{J C}^{-1}$ . Sähköopissa potentiaalin yksikköä kutsutaan voltiksi ( $\text{V} = \text{J C}^{-1}$ ) ja sähkökentän yksikkö ilmaistaan yleensä muodossa  $\text{V m}^{-1}$ .

## 2.4 Gaussin laki

Nyt olemme valmiita muotoilemaan ensimmäisen Maxwellin yhtälön. Tutustuessasi tähän ensimmäistä kertaa on erittäin hyödyllistä, että hahmottelet *itse* asiaa havainnollistavat kuvat!

### 2.4.1 Maxwellin ensimmäinen yhtälö

Tarkastellaan origossa olevan pistevarauksen  $q$  kenttää

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.17)$$

Olkoon  $V$  jokin tilavuus varauksen ympärillä ja  $S$  sen reuna. Integroidaan sähkökentän normaalikomponentti reunan yli:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS, \quad (2.18)$$

missä  $\mathbf{n}$  on pinnan  $S$  yksikköulkonormaali. Nyt  $(\mathbf{r}/r) \cdot \mathbf{n} dS$  on pinta-alkiovektorin  $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$  projektiio  $\mathbf{r}$ :ää vastaan kohtisuoralle tasolle. Tämä pinta-ala jaettuna  $r^2$ :lla on avaruuskulma-alkio  $d\Omega$ , joka pallokoordinaatistossa on  $\sin\theta d\theta d\phi$ . Valitaan  $V$ :n sisäpuolelta origokeskinen pallo, jonka reuna on  $S'$ . Infinitesimaalinen pinta-alkio  $dS'$  kattaa yhtä suuren avaruuskulman  $d\Omega$  kuin elementti  $dS$ , joten

$$\oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \oint_{S'} \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}}{r'^3} dS' = \oint_{S'} d\Omega = 4\pi, \quad (2.19)$$

mistä seuraa

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = q/\epsilon_0. \quad (2.20)$$

Jos varaus on tilavuuden  $V$  ulkopuolella, se ei vaikuta pintaintegraaliin. Tämän näkee tarkastelemalla varauksen kohdalta kohti tilavuutta  $V$  avautuvaa avaruuskulmaelementin  $d\Omega$  suuruista kartiota. Tämä kartio läpäisee tilavuuden  $V$  sekä sisään- että ulospäin ja pinta-alkioiden integraalit summautuvat nolnaan.

Tulos yleistyy  $N$ :n varauksen parvelle:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i. \quad (2.21)$$

Jos suurta varausjoukkoa tarkastellaan varausjakautumana, voidaan  $\rho dV$  ajatella alkioksi, joka tuo osuuden  $\rho dV/\epsilon_0$  eli integroituna tilavuuden  $V$  yli:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV, \quad (2.22)$$

mikä on peruskurssilta tuttu *Gaussin laki* integraalimuodossa.

Vektorianalyysin *divergenssiteoreeman* eli *Gaussin lauseen* mukaan riittävän siistille vektorikentälle  $\mathbf{u}$  pätee

$$\oint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{u} dV, \quad (2.23)$$

missä  $\mathbf{n}$  on tilavuutta  $V$  ympäröivän pinnan  $S$  ulkonormaalivektori. Sovelletaan tätä Gaussin lain vasemmalle puolelle, jolloin

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (2.24)$$

Tämän täytyy olla riippumaton tilavuuden  $V$  valinnasta, eli

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0. \quad (2.25)$$

Tämä on Gaussin laki differentiaalimuodossa eli Maxwellin ensimmäinen yhtälö.<sup>3</sup>

### 2.4.2 Gaussin lain soveltamisesta

Gaussin laki on kätevä esimerkiksi tilanteessa, jossa voidaan päätellä kentän olevan vakio jollain koordinaatiston tasa-arvopinnalla. Lisäksi on tiedettävä kenttävektorin suunta.

<sup>3</sup>Maxwellin yhtälöitä kutsutaan usein myös Maxwellin laeiksi.

### Pallosymmetrinen varausjakautuma

Pallosymmetrisessä tapauksessa varaustiheys on muotoa  $\rho = \rho(r)$ , jolloin sähkökenttä on radiaalinen ja riippuu ainoastaan etäisyydestä origosta:  $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r$ , mikä on helppo päätellä suoraan Coulombin laista. Tarkastellaan Gaussin lakia pallokoordinaateissa, kun pinnaksi  $S$  valitaan  $r$ -säteinen pallo:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} E(r)\mathbf{e}_r \cdot (r^2 \sin\theta d\theta d\phi \mathbf{e}_r) = 4\pi r^2 E(r). \quad (2.26)$$

Toisaalta pallon sisään jää varaus

$$\int \rho dV = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r')(r'^2 \sin\theta dr' d\theta d\phi) = 4\pi \int_0^r \rho(r')r'^2 dr', \quad (2.27)$$

joten pallosymmetrisen varausjakautuman sähkökenttä on

$$E(r) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r \rho(r')r'^2 dr'. \quad (2.28)$$

Sovelletaan tätä tasaisesti varatulle  $R$ -säteiselle pallolle, jonka sisällä varaustiheys on  $\rho_0$  ja ulkopuolella nolla. Pallon kokonaisvaraus on  $Q = 4\pi R^3 \rho_0/3$ . Integrointi antaa sähkökentäksi

$$\begin{aligned} r \leq R : \quad E(r) &= \frac{Q r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \\ r > R : \quad E(r) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Varausjakautuman ulkopuolella sähkökenttä on siis sama kuin origossa olevan pistevarauksen  $Q$  kenttä.

### Viivavaraus

Esimerkkinä sylinterisymmetrisestä tapauksesta tarkastellaan pitkää tasaisesti varattua ohutta lankaa, jonka varaustiheys pituusyksikköä kohti on  $\lambda$ . Symmetrian perusteella sähkökenttä on radiaalinen ja riippuu ainoastaan radiaalisesta etäisyydestä. Tarkastellaan langan ympärillä olevaa  $r$ -säteistä sylinteriä, jonka pituus on  $l$ . Integroitaessa sähkökentän normaalikomponenttia sylinterin pinnan yli sylinterin päät eivät tuota mitään. Vaipan pinta-ala on  $2\pi r l$  ja sylinterin sisällä oleva varaus  $\lambda l$ , joten Gaussin laki antaa  $2\pi r l E_r = \lambda l/\epsilon_0$  eli

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.30)$$

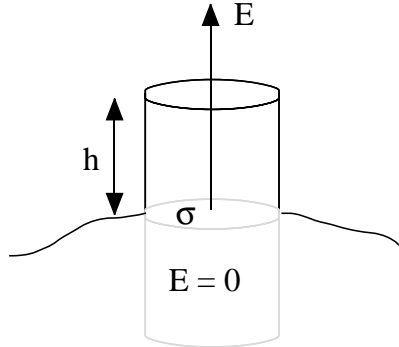
Viivavarauksen kenttä pienenee siis kuten  $r^{-1}$ . Kentän potentiaali on

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r/r_0), \quad (2.31)$$

missä  $r_0$  on vakio. Tässä tapauksessa ei siis voi valita potentiaalia nolaksi äärettömän kaukana.

### Johdekappale

Kappaletta, jolla voi olla sisäistä varausta, kutsutaan *eristeeksi* (engl. dielectric). *Johteissa* on puolestaan tarpeeksi liikkuvia varauksia, jotka jatkavat liikettään, kunnes sähkökenttä kappaleen sisällä on nolla. Varaukset joutuvat tällöin kappaleen pinnalle, eli sisällä varaustiheys on nolla ja kappaleen mahdollinen nettovaraus on pintavarausta. Jotta tilanne olisi staattinen, pinnalla olevan sähkökentän täytyy olla pinnan normaalin suuntainen:  $\mathbf{E}_n = E_n \mathbf{n}$ , koska muuten varaukset liikkuisivat pitkin pintaa.



Kuva 2.1: Pillerirasia johdekappaleen reunalla.

Sovelletaan Gaussin lakia sylinterinmuotoiseen pillerirasiaan (korkeus  $h$ ), jonka ulompi pinta yhtyy tarkasteltavan kappaleen pintaan ja jonka tilavuus on  $h dS$  ( $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ ,  $dS$  pohjan pinta-ala) (kuva 2.1). Saadaan

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{n} dS - \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\text{vaiippa}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.32)$$

missä  $\mathbf{E}_i$  on kenttä pillerirasian sisemmällä pinnalla, siis 0. Rajalla  $h \rightarrow 0$  integraali vaiipan yli menee myös nolaksi ja

$$\mathbf{E}_n \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0}. \quad (2.33)$$

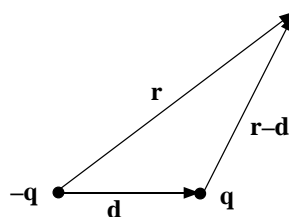
Koska tämän täytyy päteä kaikilla pinta-alkioilla, on sähkökenttä johdekappaleen pinnalla suoraan verrannollinen pintavaraukseen:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}. \quad (2.34)$$

Harjoitustehtäväksi jää osoittaa, että mielivaltaisen johdekappaleen ympäröimässä tyhjässä onkalossa ei ole sähköstaattista kenttää. Samoin jää mieltäväksi, miksi tämä on merkittävä tulos Coulombin lain kokeellisen testaamisen kannalta.

**HT:** Laske tasaisesti varatun äärettömän tason aiheuttama sähkökenttä ja vertaa ylläolevaan tulokseen.

## 2.5 Sähköinen dipoli



Kuva 2.2: Sähködipoli muodostuu kahdesta lähekkäisestä samansuuruisesta vastakkaismerkkisestä varauksesta.

Olkoon origossa varaus  $-q$  ja pisteessä  $\mathbf{d}$  varaus  $q$  (kuva 2.2). Tällöin potentiaali pisteessä  $\mathbf{r}$  on

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} - \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right). \quad (2.35)$$

Tämä lauseke on täysin yleinen riippumatta varausten etäisyydestä. Sähköisellä dipolilla tarkoitetaan raja-arvoa  $d \rightarrow 0$ , mikä on sama asia kuin dipolin katselu kaukaa ( $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{d}|$ ). Binomisarjan avulla saadaan

$$|\mathbf{r} - \mathbf{d}|^{-1} = [r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{d} + d^2]^{-1/2} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} + \dots \right). \quad (2.36)$$

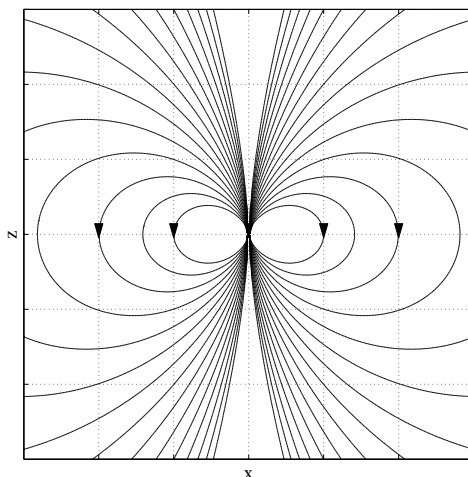
Rajalla  $d \rightarrow 0$  potentiaali häviää, ellei  $q$  kasva rajatta. Pistedipoli on idealisaatio, jonka varaus on nolla, mutta jonka *dipolimomentti*  $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$  on äärellinen. Origossa olevan sähködipolin potentiaali on siis

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.37)$$

Ottamalla tästä gradientin vastaluku saadaan sähkökentäksi

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{3p \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right\}, \quad (2.38)$$

missä  $\theta$  on dipolimomentin ja vektorin  $\mathbf{r}$  välinen kulma. Myöhemmin saadaan magneettiselle dipolille samanmuotoiset lausekkeet. Dipolikentän kenttäviivat on hahmoteltu kuvaan 2.3.



Kuva 2.3: Dipolikentän kenttäviivat  $xz$ -tasossa. Dipoli sijaitsee origossa ja on  $z$ -akselin suuntainen.

## 2.6 Sähkökentän multipolikehitelmä

Tarkastellaan seuraavaksi mielivaltaista varausjakautumaa  $\rho(\mathbf{r}')$  origon ympäristössä. Sen aiheuttama potentiaali pisteessä  $\mathbf{r}$  on

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (2.39)$$

Kehitetään  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$  binomisarjaksi, kun  $r > r'$ :

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} &= (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[ -\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right] + \frac{3}{8} [ ]^2 + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Sijoitetaan tämä potentiaalilausekkeeseen, jätetään  $\mathbf{r}'$ :n toista potenssia korkeammat termit pois ja järjestetään termit  $\mathbf{r}'$ :n kasvavien potenssien mukaan. Tämä antaa potentiaalilausekkeen multipolikehitelmän *kvadrupolimomenttia*

myöten

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \int_V \rho(\mathbf{r}') dV' + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV' \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} \int_V (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2) \rho(\mathbf{r}') dV' \right\}, \quad (2.41) \end{aligned}$$

missä  $x_i$ :t ovat paikkavektoreiden karteesisia komponentteja ja  $\delta_{ij}$  on *Kroneckerin delta*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (2.42)$$

Multipolikehitelmän ensimmäinen tekijä vastaa origoon sijoitetun varausjakautuman osuutta potentiaaliin. Toinen tekijä vastaa origoon sijoitettua dipolimomenttien jakautumaa. Kolmas termi on muotoa

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij},$$

missä  $Q_{ij}$ :t ovat *kvadrupolimomenttitensorin* komponentit. Potentiaalin multipolikehitelmä voidaan siis kirjoittaa sarjana

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} Q_{ij} + \dots \right\}. \quad (2.43)$$

Kaukana varausjakautumasta potentiaali on likimain ensimmäisen nolasta poikkeavan termin aiheuttama potentiaali. Atomien ytimissä dipolimomentti on nolla, mutta korkeammat multipolit ovat tärkeitä ydinfysiikassa.

## 2.7 Poissonin ja Laplacen yhtälöt

Sähköstatiikka olisi aika suoraviivaista, jos tietäisimme kaikkien varausjakautumien paikkariippuvuudet. Näin ei kuitenkaan ole monissa käytännön ongelmissa. Koska  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  ja  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , Gaussin laki differentiaalimuodossa vastaa matematiikan *Poissonin yhtälöä*:

$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0. \quad (2.44)$$

Jos varaustiheys on nolla, niin Poissonin yhtälö yksinkertaistuu *Laplacen yhtälöksi*:

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (2.45)$$

Laplacen yhtälön toteuttavaa funktiota kutsutaan harmoniseksi.

Poissonin yhtälö voidaan ratkaista, jos varausjakautuma ja oikeat reunaehdot tunnetaan. Tarkastellaan sähköstaattista systeemiä, joka koostuu  $N$  johdekappaleesta. Kunkin johteen pinnalla potentiaali on  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Reunaehtoja on kahta perustyyppiä:

1. Tunnetaan potentiaali  $\varphi$  alueen reunalla (*Dirichlet'n reunaehto*).
2. Tunnetaan potentiaalिन derivaatan normaalikomponentti  $\partial\varphi/\partial n$  alueen reunalla (*Neumannin reunaehto*).

Selvitetään, ovatko mahdollisesti löydettävät ratkaisut yksikäsitteisiä. On selvää, että jos  $\varphi_1(\mathbf{r}), \dots, \varphi_n(\mathbf{r})$  ovat Laplacen yhtälön ratkaisuja, niin

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum C_i \varphi_i(\mathbf{r}),$$

missä  $C_i$ :t ovat mielivaltaisia vakioita, on Laplacen yhtälön ratkaisu. Todistetaan sitten seuraava *yksikäsitteisyyslause*:

*Kaksi annetut reunaehdot täyttävää Poissonin yhtälön ratkaisua ovat additiivista vakiota vaille samat.*

Tarkastellaan johteiden pinnat  $S_1, \dots, S_N$  sisäänsä sulkevaa tilavuutta  $V_0$ , joka on pinnan  $S$  sisällä (pinta voi olla äärettömyydessä). Olkoot  $\varphi_1$  ja  $\varphi_2$  kaksi Poissonin yhtälön toteuttavaa ratkaisua, jotka täyttävät samat reunaehdot johteiden pinnalla  $S_I$ , siis joko  $\varphi_1 = \varphi_2$  tai  $\partial\varphi_1/\partial n = \partial\varphi_2/\partial n$  näillä pinnoilla sekä pinnalla  $S$ . Tarkastellaan funktiota  $\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$ . Tilavuudessa  $V_0$  on selvästi  $\nabla^2\Phi = 0$ . Reunaehdoista puolestaan seuraa, että kaikilla reunoilla

$$\text{joko } \Phi = 0 \text{ tai } \mathbf{n} \cdot \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0.$$

Sovelletaan sitten divergenssiteoreemaa vektoriin:  $\Phi\nabla\Phi$

$$\int_{V_0} \nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) dV = \oint_{S+S_1+\dots+S_N} (\Phi\nabla\Phi) \cdot \mathbf{n} dS = 0,$$

koska joko  $\Phi$  tai  $\nabla\Phi \cdot \mathbf{n}$  on pinnoilla 0. Toisaalta

$$\nabla \cdot (\Phi\nabla\Phi) = \Phi\nabla^2\Phi + (\nabla\Phi)^2 = (\nabla\Phi)^2$$

eli

$$\int_{V_0} (\nabla\Phi)^2 dV = 0.$$

Koska  $(\nabla\Phi)^2 \geq 0$  koko alueessa  $V_0$ , sen on oltava nolla kaikkialla. Tästä seuraa, että  $\Phi$  on vakio koko alueessa  $V_0$  ja yksikäsitteisyyslause on siten todistettu.

Tämä ei ole todistus ratkaisun olemassaololle vaan sille, että mahdolliset ratkaisut ovat yksikäsitteisiä. Tuloksen tärkeys on siinä, että löydettiinpä annetut reunaehdot täyttävä Poissonin yhtälön ratkaisu millä keinolla tahansa, se on Dirichlet'n reunaehdolla yksikäsitteinen ja Neumannin reunaehdolla vakioita eli potentiaalिन nollatason valintaa vaille yksikäsitteinen.

## 2.8 Laplacen yhtälön ratkaiseminen

Laplacen yhtälö on fysiikan keskeisimpiä yhtälöitä. Sähköopin lisäksi se esiintyy lämmönsiirtymisilmiöissä, virtausmekaniikassa jne. Kovin monimutkaisissa tilanteissa yhtälöä ei voi ratkaista analyyttisesti. Joskus ongelman symmetriasta on kuitenkin hyötyä ja Laplacen yhtälö, joka on osittaisdifferentiaaliyhtälö, saadaan separointimenetelmällä muunnetuksi ryhmäksi tavallisia yhden muuttujan differentiaaliyhtälöitä. Laplacen yhtälö voidaan separoida kaikkiaan 11 erilaisessa koordinaatistossa, joista tässä esiteltävät kolme tapusta ovat tavallisimmat ainakin oppikirjatasolla.

### 2.8.1 Karteesinen koordinaatisto

Kirjoitetaan Laplacen yhtälö ensin karteesisissa koordinaateissa:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.46)$$

ja etsitään sille ratkaisua yritteellä

$$\varphi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (2.47)$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (2.46) ja jaetaan tulolla  $XYZ$ , jolloin saadaan

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0. \quad (2.48)$$

Nyt jokainen termi riippuu vain yhdestä muuttujasta, jotka ovat keskenään riippumattomia. Niinpä kunkin termin on oltava erikseen vakioita:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \alpha^2; \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \beta^2; \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2, \quad (2.49)$$

missä  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ . Kukin yhtälöistä (2.49) on helppo ratkaista:

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 e^{\alpha x} + A_2 e^{-\alpha x} \\ Y(y) &= B_1 e^{\beta y} + B_2 e^{-\beta y} \\ Z(z) &= C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Yleisesti kompleksiarvoiset vakiot  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  ja  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  määräytyvät ongelman reunaehdoista. Koko ratkaisu on muodollisesti summa

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} X(x)Y(y)Z(z), \quad (2.51)$$

missä separointivakioille  $\alpha, \beta, \gamma$  tulee tarkasteltavasta tilanteesta riippuvia rajoituksia.

**Esimerkki. Potentiaali laatikossa**

Tarkastellaan laatikkoa  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ ,  $0 < z < c$ . Olkoon potentiaali nolla muilla reunoilla paitsi yläkannella ( $z = c$ ), jossa se on tunnetuksi oletettu funktio  $V(x, y)$ . Ratkaistaan potentiaali laatikon sisällä.

Edellä saatua ratkaisua voitaisiin käyttää suoraan, mutta kirjoitetaankin nerokkaasti<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 \sin(\alpha x) + A_2 \cos(\alpha x) \\ Y(y) &= B_1 \sin(\beta y) + B_2 \cos(\beta y) \\ Z(z) &= C_1 \sinh(\gamma z) + C_2 \cosh(\gamma z), \end{aligned} \quad (2.52)$$

missä  $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$  (**HT:** totea, että yrite on kelvallinen). Tässä on tarkoituksella valittu trigonometriset funktiot  $x$ - ja  $y$ -suunnissa ja hyperboliset funktiot  $z$ -suunnassa. Reunaehdoja soveltamalla nähdään heti, että  $A_2 = B_2 = C_2 = 0$ , kun separointivakiot  $\alpha$  ja  $\beta$  toteuttavat seuraavat ehdot (reunaehdoista sivuilla  $x = a$  ja  $y = b$ )

$$\begin{aligned} \alpha &= m\pi/a \\ \beta &= n\pi/b, \end{aligned} \quad (2.53)$$

missä  $m, n$  ovat kokonaislukuja, ja ne voidaan rajoittaa lisäksi positiivisiksi, koska vain lineaarisesti riippumattomat ratkaisut tarvitsee ottaa huomioon. Myös kolmas separointivakio saa silloin vain diskreettejä arvoja:

$$\gamma = \gamma_{mn} = \pi \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}. \quad (2.54)$$

Samaan tulokseen olisi luonnollisesti päädytty, vaikka olisi lähdetty liikkeelle eksponenttifunktioiden avulla kirjoitetusta ratkaisusta. Tilanteesta riippuu, mikä muoto on lasku- ja päättelyteknisesti mukavin.

Tähän mennessä on siis saatu ratkaisuksi Fourier-sarja:

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \sinh(\gamma_{mn} z). \quad (2.55)$$

On järkevää tarkastaa vielä kerran, että tämä toteuttaa Laplacen yhtälön ja antaa potentiaaliksi nollan vaadituilla reunoilla. Tuntemattomat kertoimet  $A_{mn}$  saadaan asettamalla  $z = c$ :

$$\varphi(x, y, c) = V(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \sinh(\gamma_{mn} c). \quad (2.56)$$

<sup>4</sup>Yksikäsitteisyyslauseen nojalla, kaikki keinot reunaehdot toteuttavan ratkaisun löytämiseksi ovat sallittuja. Ongelmanratkaisussa kokemus ja intuitio ovat tärkeitä.

Loppu on Fourier-kertoimien määrittämistä. Jos funktio  $V(x, y)$  on riittävän siisti, kertoimet saadaan lasketuiksi ortogonaalisuusintegraalien avulla. Tämä lienee tuttua FYMM I:ltä.

Edellä ei mietitty sitä mahdollisuutta, että jotkin separointivakioista olisivat voineet olla nollija. Huolellinen lukija tutkikoon erikseen tämän tilanteen. Lyhyemmin voidaan kuitenkin todeta, että löydetty ratkaisu on selvästi kelvollinen ja yksikäsitteisyyslauseen mukaan ongelma on sillä selvä.

### 2.8.2 Pallokoordinaatisto

Koska pistevarauksen kenttä on pallosymmetrinen, pallokoordinaatisto on usein erittäin käyttökelpoinen. Laplacen yhtälö on tällöin

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (2.57)$$

Etsitään tälle ratkaisua muodossa

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{R(r)}{r} \Theta(\theta) \Phi(\phi). \quad (2.58)$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (2.57), kerrotaan suurella  $r^2 \sin^2 \theta$  ja jaetaan  $R\Theta\Phi$ :llä:

$$r^2 \sin^2 \theta \left( \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0. \quad (2.59)$$

Ainoastaan viimeinen termi riippuu  $\phi$ :stä, joten sen on oltava vakio, jota merkitään  $-m^2$ :llä:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2. \quad (2.60)$$

Tämän ratkaisut ovat muotoa

$$\Phi(\phi) = C e^{\pm im\phi}. \quad (2.61)$$

Yleisesti  $m$  on kompleksinen, mutta fysikaalinen ehto rajaa sen mahdolliset arvot: jotta potentiaali olisi jatkuva, kun  $\phi \rightarrow 0$  ja  $\phi \rightarrow 2\pi$ , on oltava  $\Phi(0) = \Phi(2\pi)$ , joten  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Jatkuvuus on luonnollinen vaatimus, koska sähköstaattinen potentiaali voidaan tulkita yksikkövarauksen potentiaalienergiaksi.

Jotta koko yhtälön (2.59) toteutuisi, ensimmäisen termin on oltava puolestaan  $m^2$ , joten

$$\frac{1}{R} r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) = 0. \quad (2.62)$$

Tämän yhtälön ensimmäinen ja toinen termi riippuvat kumpikin ainoastaan omasta muuttujastaan ja ovat siten yhtäsuuria vastakkaismerkkisiä vakioita, joita merkitään mukavuussyistä  $l(l+1)$ :llä:

$$\frac{1}{R} r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} = l(l+1) \quad (2.63)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = -l(l+1). \quad (2.64)$$

Yhtälön (2.63) yleinen ratkaisu löydetään yrittäällä  $R(r) = r^s$ :

$$R(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l}, \quad (2.65)$$

missä  $A$  ja  $B$  ovat vakioita. Kirjoittamalla  $\xi = \cos \theta$  saadaan  $\Theta$ :n yhtälöksi

$$\frac{d}{d\xi} \left( (1 - \xi^2) \frac{d\Theta}{d\xi} \right) + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right) \Theta = 0. \quad (2.66)$$

Jotta tämän ratkaisut olisivat äärellisiä pisteissä  $\xi = \pm 1$  eli  $\theta = 0, \pi$ , on oltava  $l = |m|, |m| + 1, \dots$ . Tietyllä tavalla normitettuja ratkaisuja ovat Legendren liittofunktiot  $P_l^m(\xi)$ . Niille on voimassa ehto  $|m| \leq l$ , joten

$$m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l. \quad (2.67)$$

Erikoistapauksessa  $m = 0$  Laplacen yhtälön ratkaisu ei riipu  $\phi$ :sta, jolloin Legendren liittofunktiot palautuvat Legendren polynomeiksi  $P_l$ :

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l. \quad (2.68)$$

Legendren liittofunktiot saadaan puolestaan Legendren polynomeista:

$$P_l^m(\xi) = (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\xi^m} P_l(\xi). \quad (2.69)$$

Yleisesti Laplacen yhtälöllä on siis pallokoordinaatistossa jokaista  $l$  kohti  $2l + 1$  kulmista  $\theta$  ja  $\phi$  riippuvaa ratkaisua. Ne voidaan sopivasti normittaen lausua *palloharmonisten funktioiden*

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.70)$$

avulla. Normitus on valittu siten, että pallofunktiot  $Y_{lm}$  muodostavat ortonormitetun täydellisen funktiojärjestelmän pallon pinnalla:

$$\int Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{np}(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{ln} \delta_{mp}. \quad (2.71)$$

Palloharmonisten funktioiden yhteenlaskuteoreema antaa kahden vektorin välisen etäisyyden käänteisluvun summana

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta', \phi'), \quad (2.72)$$

missä vektorin  $\mathbf{r}$  suuntakulmat ovat  $\theta, \phi$  ja vektorin  $\mathbf{r}'$  suuntakulmat  $\theta', \phi'$  sekä  $r_{<} = \min(r, r')$  ja  $r_{>} = \max(r, r')$ . Tämä on hyödyllinen tulos, koska se erottelee pisteiden  $\mathbf{r}$  ja  $\mathbf{r}'$  koordinaatit  $(r, \theta, \phi)$  ja  $(r', \theta', \phi')$ . Moni integraali olisi vaikea laskea ilman tätä kaavaa.

Mikä hyvänsä riittävän säännöllinen pallon pinnalla määritelty funktio voidaan kehittää palloharmonisten funktioiden sarjaksi. Esimerkkinä käy maapallon magneettikenttä, jonka sarjakehitelmän johtava termi vastaa magneettista dipolia ja korkeammat termit johtuvat kentän lähteen poikkeamisesta dipolista, magneettisen maa-aineksen epätasaisesta jakautumasta ja maapallon yläpuolisissa ionosfäärissä ja magnetosfäärissä kulkevista sähkövirroista. Palloharmonisia funktioita tarvitaan paljon myös atomifysiikassa ja kvanttimekaniikassa mm. tarkasteltaessa impulssimomenttioperaattoreita. Tekijä  $(-1)^m$  kaavassa (2.70) on vaihetekijä, joka voidaan jättää pois tai ottaa mukaan jo  $P_l^m$ :n määritelmässä (2.69). Sen ottaminen mukaan on hyödyllistä etenkin kvanttimekaniikan laskuissa (katso esim. Arfkenin ja Weberin matemaattisten menetelmien oppikirja).

Kootaan lopuksi Laplacen yhtälön separoituva ratkaisu, kun  $0 < r < \infty$ :

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \sum_{lm} A_{lm} r^l Y_{lm}(\theta, \phi) + \sum_{lm} B_{lm} r^{-l-1} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (2.73)$$

missä summaus on

$$\sum_{lm} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l$$

ja kertoimet  $A_{lm}, B_{lm}$  määräytyvät reunaehdoista.

### Esimerkki. Kiertosymmetrinen tilanne

Rajoitutaan sitten tilanteeseen, jossa  $\partial\varphi/\partial\phi = 0$  eli  $\varphi = \varphi(r, \theta)$ . Tällaisia ovat esimerkiksi pistevarauksen tai dipolin kentät. Laplacen yhtälö on nyt

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (2.74)$$

Toistetaan harjoituksen vuoksi edellä ollut muuttujien separointi etsimällä ratkaisua yritteellä  $\varphi(r, \theta) = Z(r)P(\theta)$ , jolloin

$$\frac{1}{Z} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dZ}{dr} \right) = - \frac{1}{P \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right). \quad (2.75)$$

Yhtälön molemmat puolet ovat yhtä suuria kuin jokin vakio  $k$  kaikilla  $r:n$  ja  $\theta:n$  arvoilla. Näin osittaisdifferentiaaliyhtälö on hajotettu kahdeksi tavalliseksi differentiaaliyhtälöksi. Kulman  $\theta$  yhtälöä kirjoitettuna muodossa

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + kP = 0 \quad (2.76)$$

kutsutaan *Legendren yhtälöksi*. Kuten edellä todettiin, fysikaalisesti kelvolliset ratkaisut kaikilla  $\theta \in [0, \pi]$  edellyttävät, että  $k = n(n+1)$ , missä  $n$  on positiivinen kokonaisluku. Ratkaisut ovat Legendren polynomeja  $P_n(\cos \theta)$ :

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\cos \theta)^n} [\cos^2 \theta - 1]^n. \quad (2.77)$$

Muutama ensimmäinen  $P_n$  on

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= \cos \theta \\ P_2 &= \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ P_3 &= \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta). \end{aligned}$$

Radiaalisen yhtälön

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dZ}{dr} \right) = n(n+1)Z \quad (2.78)$$

kaksi riippumatonta ratkaisua ovat muotoa  $r^n$  ja  $r^{-(n+1)}$ . Täydellinen ratkaisu on näiden lineaariyhdistelmä:

$$Z_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)} \quad (2.79)$$

ja koko Laplacen yhtälön ratkaisu kiertosymmetriassa on muotoa

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta). \quad (2.80)$$

Integroimisvakiot  $A_n$  ja  $B_n$  on määritettävä reunaehdoista.

### **Esimerkki. Johdepallo vakiosähkökentässä**

Tuodaan tasaiseen sähkökenttään  $\mathbf{E}_0$  varaamaton  $a$ -säteinen johdepallo. Johde pakottaa alunperin suorat kenttäviivat taipumaan siten, että ne osuvat pintaan kohtisuoraan. Valitaan koordinaatisto siten, että origo on pallon keskipisteessä ja  $z$ -akseli on sähkökentän suuntainen. Tällöin ongelma

on kiertosymmetrinen. Johteen pinta on kaikkialla samassa potentiaalissa  $\varphi(a, \theta) = \varphi_0$ . Kaukana pallosta sähkökenttä lähestyy vakioarvoa

$$\mathbf{E}(r, \theta)_{r \rightarrow \infty} = E_0 \mathbf{e}_z, \quad (2.81)$$

joten kaukana potentiaali lähestyy lauseketta

$$\varphi(r, \theta)_{r \rightarrow \infty} = -E_0 z + C = -E_0 r \cos \theta + C. \quad (2.82)$$

Kirjoitetaan potentiaalın muutama ensimmäinen termi lausekkeesta (2.80):

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) = & A_0 + \frac{B_0}{r} + A_1 r \cos \theta + \frac{B_1}{r^2} \cos \theta + A_2 r^2 \left[ \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right] \\ & + \frac{B_2}{r^3} \left[ \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.83)$$

Kun  $r \rightarrow \infty$ , niin  $\varphi = -E_0 r \cos \theta$ , joten  $A_n = 0$  kaikille  $n \geq 2$ ,  $A_0 = C$  ja  $A_1 = -E_0$ . Koska pallon kokonaisvaraus on nolla, potentiaalissa ei ole  $1/r$ -riippuvuutta, eli  $B_0 = 0$ . Jäljellä olevat  $\cos^n \theta$ -termit ( $n \geq 2$ ) ovat kaikki lineaarisesti riippumattomissa polynomeissa  $P_n$ , joten ne eivät voi kumota toisiaan pallon pinnalla, missä ei ole  $\theta$ -riippuvuutta, eli  $B_n = 0$  kaikille  $n \geq 2$ . Jäljelle jää

$$\varphi(a, \theta) = \varphi_0 \quad (2.84)$$

$$\varphi(r, \theta) = C - E_0 r \cos \theta + \frac{B_1}{r^2} \cos \theta. \quad (2.85)$$

Kun  $r = a$ ,  $\cos \theta$ -termien on kumottava toisensa, joten  $C = \varphi_0$  ja  $B_1 = E_0 a^3$ . Reunaehdot täyttävä Laplacen yhtälön ratkaisu on siis

$$\varphi(r, \theta) = \varphi_0 + \left( \frac{a^3 E_0}{r^2} - E_0 r \right) \cos \theta. \quad (2.86)$$

Sähkökentän  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$  komponentit ovat

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = E_0 \left( 1 + 2 \frac{a^3}{r^3} \right) \cos \theta \quad (2.87)$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -E_0 \left( 1 - \frac{a^3}{r^3} \right) \sin \theta. \quad (2.88)$$

Pallon pintavaraustiheys on

$$\sigma = \epsilon_0 E_r(r = a) = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta. \quad (2.89)$$

Indusoituva pintavarausjakautuma on  $\theta$ :n funktio. Sen dipolimomentti on

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_{\text{pallo}} \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV = \int_{r=a} (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z) (3\epsilon_0 E_0 \cos \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 6\pi a^3 \epsilon_0 E_0 \int_0^\pi \mathbf{e}_z \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 4\pi \epsilon_0 a^3 E_0 \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Pallon ulkopuolella tämän osuus kentästä on sama kuin origoon sijoitetun dipolin, jonka dipolimomentti on  $\mathbf{p} = 4\pi \epsilon_0 a^3 E_0 \mathbf{e}_z$ .

### 2.8.3 Sylinterikoordinaatisto

Tarkastellaan sitten tilannetta, jossa ei ole riippuvuutta yhden akselin ( $z$ ) suunnassa ja käytetään sylinterikoordinaatistoa. Nyt  $\partial\varphi/\partial z = 0$  ja Laplacen yhtälö on

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (2.91)$$

**Huom.** Sylinterikoordinaatistossa  $r$ :llä ja  $\theta$ :lla on eri merkitys kuin pallokoordinaatistossa! Kirjallisuudessa käytetään usein radiaalietäisyydelle symbolia  $\rho$  ja kiertokulmalle  $\phi$ .

Laplacen yhtälö separoituu yritteellä  $\varphi = Y(r)S(\theta)$ :

$$\frac{r}{Y} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dY}{dr} \right) = -\frac{1}{S} \frac{d^2 S}{d\theta^2} = n^2, \quad (2.92)$$

missä separointivakiolle  $n^2$  tulee jälleen rajoituksia kulmayhtälöstä

$$\frac{d^2 S}{d\theta^2} + n^2 S = 0. \quad (2.93)$$

Tämän ratkaisut ovat  $\sin(n\theta)$  ja  $\cos(n\theta)$ . Jos kulma  $\theta$  saa kaikki arvot välillä  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , on oltava  $\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2\pi)$ . Tästä seuraa, että  $n$  on kokonaisluku, joka voidaan rajoittaa positiiviseksi, koska negatiiviset  $n$ :n arvot eivät tuo uusia lineaarisesti riippumattomia termejä. Lisäksi tapauksessa  $n = 0$  saadaan ratkaisu  $S = A_0\theta + C_0$ . Ehto  $\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2\pi)$  ei silloin toteudu, mutta pidetään tämäkin termi mukana täydellisyyden vuoksi.

Radiaalisesta yhtälöstä tulee nyt

$$r \frac{d}{dr} \left( r \frac{dY}{dr} \right) - n^2 Y = r^2 \frac{d^2 Y}{dr^2} + r \frac{dY}{dr} - n^2 Y = 0, \quad (2.94)$$

joka ratkeaa yritteellä  $Y = r^s$ . Saadaan  $s = \pm n$ , joten ratkaisufunktiot ovat muotoa  $Y = r^n$  ja  $Y = r^{-n}$ . Tapaus  $n = 0$  antaa lisäksi  $Y = \ln(r/r_0)$ . Kokonaisuudessaan ratkaisu on

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) = & \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) (C_n \sin n\theta + D_n \cos n\theta) \\ & + (A_0 \ln(r/r_0)) (C_0 \theta + D_0) \end{aligned} \quad (2.95)$$

Vakiot on jälleen selvitettävä tarkasteltavan tilanteen ominaisuuksista ja reunaehdoista.

**Huom.** Jos kulmariippuvuus on rajattu johonkin sektoriin, on pallo- ja sylinterikoordinaatistossa kulmayhtälöiden separointivakioiden arvot määrittävä tapauskohtaisesti. Esimerkiksi pallokalotin tapauksessa päädytään kalottiharmonisiin funktioihin, jotka ovat paljon konstikkaampia kuin palloharmoniset funktiot.

## 2.9 Kuvalähdemenetelmä

Laplacen yhtälön ratkaisujen yksikäsitteisyys antaa ratkaisijalle vapauden käyttää mieleisiään kikkoja ratkaisun löytämiseen. Tietyissä geometrisesti yksinkertaisissa tapauksissa *kuvalähdemenetelmä* (tai *peilivarausermenetelmä*) on kätevä keino välttää differentiaaliyhtälön ratkaiseminen. Tarkastellaan tilannetta, jossa on joko annettu tai varausjakautumasta helposti laskettavissa oleva potentiaali  $\varphi_1(\mathbf{r})$  ja johteita, joiden pintavarausjakautuma olkoon  $\sigma(\mathbf{r})$ . Kokonaispotentiaali on

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_1(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2.96)$$

Ratkaisuun johdesysteemin ulkopuolella ei vaikuta lainkaan, kuinka varaus on jakautunut johteen pinnan takana, kunhan pinnalla on voimassa samat reunaehdot. Voidaan siis ajatella, ettei kyseessä olekaan johdekappale vaan pinta, jonka takana on varausjakautuma, joka antaa samat reunaehdot kuin oikea johdekappaleen pintavaraus. Kuvamenetelmää voidaan käyttää myös ajasta riippuvissa tilanteissa sekä varausten että virtojen yhteydessä muidenkin aineiden kuin johteiden yhteydessä.

### Esimerkki. Pistevaraus johdetason lähellä

Valitaan johdetasoksi  $(y, z)$ -taso ja asetetaan varaus  $q$   $x$ -akselille pisteeseen  $x = d$ . Taso oletetaan maadoitetuksi, jolloin sen potentiaali voidaan valita nolllaksi. Toisaalta taso saadaan nolllapotentiaaliin asettamalla varaus  $-q$  pisteeseen  $(-d, 0, 0)$ . Ratkaisujen yksikäsitteisyyden vuoksi näin saadaan oikea ratkaisu alueessa  $x \geq 0$ . Puoliavaruuteen  $x < 0$  tätä menetelmää ei saa soveltaa, koska siellä ei ole oikeasti varausta.

Kokonaispotentiaali on

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}|} \right), \quad (2.97)$$

missä  $\mathbf{d} = (d, 0, 0)$ . Tästä saa suoraan sähkökentän:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\mathbf{r} - \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|^3} - \frac{\mathbf{r} + \mathbf{d}}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}|^3} \right) \quad (2.98)$$

ja johteen pintavaraustiheyden:

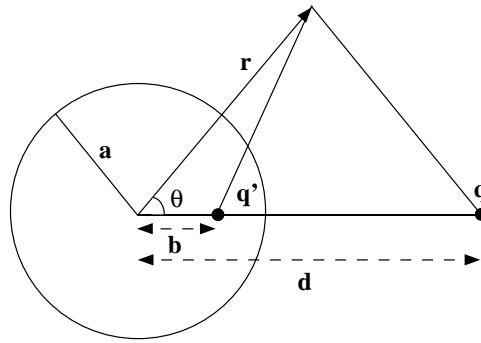
$$\sigma(y, z) = \epsilon_0 E_x|_{x=0} = -\frac{qd}{2\pi(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (2.99)$$

Varaus vetää pintaa puoleensa samalla voimalla kuin se vetäisi etäisyydellä  $2d$  olevaa vastakkaismerkkistä varausta.

**HT:** Integroi pintavaraustiheys koko tason yli.

Tässä esimerkissä siis pisteessä  $(d, 0, 0)$  olevan pistevarauksen potentiaali toteuttaa Poissonin yhtälön alueessa  $x > 0$ . Tämä ei kuitenkaan riitä ratkaisuksi, koska reunaehto johdetasolla ei toteudu. Pisteessä  $(-d, 0, 0)$  olevan kuvälähteen potentiaali puolestaan toteuttaa Laplaceen yhtälön alueessa  $x > 0$  ja sen lisäksi varmistaa reunaehdon toteutumisen. Yhteenlaskettu potentiaali on siis haettu ratkaisu alueessa  $x > 0$ .

**Esimerkki. Pistevaraus maadoitetun johdepallon lähellä**



Kuva 2.4: Pistevaraus johdepallon lähellä.

Valitaan origoksi pallon keskipiste, olkoon  $a$  pallon säde ja  $d$  etäisyys origosta varaukseen  $q$  (kuva 2.4). Etsitään potentiaali  $\varphi(\mathbf{r})$  ( $r \geq a$ ) reunaehdolla  $\varphi(a) = 0$ . Symmetrian perusteella peilivarauksen  $q'$  täytyy olla suoralla, joka kulkee varauksen  $q$  ja origon kautta. Varauksen ja peilivarauksen yhteenlaskettu potentiaali pisteessä  $\mathbf{r}$  on

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} + \frac{q'}{|\mathbf{r} - \mathbf{b}|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{1/2}} + \frac{q'}{(r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta)^{1/2}} \right]. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Pallon pinnalla potentiaali on nolla kaikilla  $\theta, \phi$ . Sijoittamalla  $r = a$  ja asettamalla  $\theta = 0$  ja  $\theta = \pi$  saadaan peilivarauksen paikka ja suuruus:

$$b = \frac{a^2}{d}, \quad q' = -\frac{a}{d} q \quad (2.101)$$

ja ongelma on ratkaistu.

Mikäli palloa ei olisi maadoitettu, sen keskipisteeseen voitaisiin asettaa toinen peilivaraus  $q''$ , joka puolestaan sovitettaisiin antamaan pinnalla oikea reunaehto. Pallon kokonaisvaraus olisi tällöin  $Q = q' + q''$ .

## 2.10 Greenin funktiot<sup>5</sup>

Edellä tarkasteltiin tilanteita, joissa oli joko pelkästään johdekappaleita tai johdekappaleita ja yksittäisiä varauksia. Yleisessä tilanteessa voi olla annettu varausjakautuma  $\rho$  sekä johdekappaleita, joiden pintavarausjakautuma on tuntematon. Tällöin on ratkaistava Poissonin yhtälö

$$\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0. \quad (2.102)$$

Tämä voidaan tehdä integroimalla varausjakautuman yli

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (2.103)$$

ja lisäämällä tähän Laplacen yhtälön sellainen ratkaisu  $\varphi_2$ , että yhteenlaskettu potentiaali toteuttaa reunaehdot johdekappaleiden pinnalla.

Aiemmat esimerkit ovat perustuneet hyvin yksinkertaiseen geometriaan. Yleisemmin voidaan osoittaa, että Laplacen ja Poissonin yhtälöt, jotka toteuttavat joko Dirichlet'n tai Neumannin reunaehdot, voidaan ratkaista käyttäen Greenin teoreemaa ja Greenin funktioita.

On suoraviivainen harjoitustehtävä johtaa divergenssiteoreemasta Greenin ensimmäinen kaava (GI):

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dV = \oint_S \varphi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.104)$$

ja Greenin toinen kaava (GII):

$$\int_V (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) dV = \oint_S (\psi \nabla \varphi - \varphi \nabla \psi) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.105)$$

joka tunnetaan myös nimellä *Greenin teoreema*. Kolmas Greenin kaava (GIII) saadaan soveltamalla GII:ta tapaukseen

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

missä  $\mathbf{r}$  on jokin kiinteä piste alueessa  $V$ . Muodollisesti voidaan kirjoittaa

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (2.106)$$

Sijoittamalla nämä GII:een (2.105) saadaan GIII

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}') \\ &+ \frac{1}{4\pi} \oint_S dS' \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \varphi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.107)$$

<sup>5</sup>Tämä jakso ei ole kurssin varsinaista ydinainesta, mutta sen voi katsoa kuuluvan fyysikon yleissivistykseen. Sekä elektrodynamiikan sovellutuksissa että pidemmälle menevässä teoreettisessa fysiikassa Greenin funktioihin törmää usein.

GIII:a ei voi käyttää suoraan, koska siinä esiintyvät sekä Dirichlet'n että Neumannin reunaehdot. Oletetaan, että  $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  on jokin alueessa  $V$  määritelty harmoninen funktio eli funktio, joka toteuttaa Laplacen yhtälön  $\nabla^2 F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ , missä derivoidaan pilkuttoman koordinaatin suhteen. Nyt GII antaa tuloksen

$$0 = - \int_V dV' F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}') + \oint_S dS' \left( F(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \varphi(\mathbf{r}') \right). \quad (2.108)$$

Muodostetaan sitten *Greenin funktio*

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (2.109)$$

Summaamalla (2.107) ja (2.108) saadaan tulos

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V dV' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \varphi(\mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi} \oint_S dS' \left( G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} \varphi(\mathbf{r}') \right). \quad (2.110)$$

Valitsemalla  $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  sopivasti saadaan tästä Poissonin yhtälön ratkaisu annetuilla reunaehdoilla. Greenin funktiolla on selvästi ominaisuus

$$\nabla'^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (2.111)$$

missä  $\nabla'$  tarkoittaa derivointia vektorin  $\mathbf{r}'$  suhteen. Greenin funktioiden käyttö ei rajoitu Poissonin yhtälön ratkomiseen, vaan niillä on keskeinen osa ratkottaessa erilaisia integraaliyhtälöitä.

### **Esimerkki. Pallon Greenin funktio**

Tarkastellaan esimerkkinä pallon Greenin funktiota Dirichlet'n reunaehdolla olettaen potentiaali pallon pinnalla on tunnetuksi. Tällöin valitaan

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.112)$$

reunaehdolla

$$\left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + F_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right]_{\mathbf{r}' \in S} = 0, \quad (2.113)$$

missä  $S$  on pallon pinta. Jo aiemmin on ratkaistu identtinen ongelma yhdelle pistevaraukselle pallon ulkopuolella ehdolla, että potentiaali pinnalla on

nolla yhtälössä (2.100). Siellä saatu ratkaisu on vakioita  $q/4\pi\epsilon_0$  vaille yhtälön (2.113) ratkaisu, joten

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{a}{r' |\mathbf{r} - (a/r')^2 \mathbf{r}'|}, \quad (2.114)$$

missä  $a$  on origokeskisen pallon säde. Havaitaan, että Greenin funktio on symmetrinen muuttujien  $\mathbf{r}$  ja  $\mathbf{r}'$  suhteen. Tämä ominaisuus pätee yleisemminkin (ks. esim. Jackson).

Potentiaali saadaan integroimalla:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} \varphi(\mathbf{r}') dS', \quad (2.115)$$

missä on  $V$  viittaa pallon sisäosaan ja  $S$  pintaan. Normaalivektori  $\mathbf{n}$  suuntautuu ulospäin siitä alueesta, jossa potentiaali halutaan laskea. Tarkasteltaessa aluetta pallon sisällä  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ . Ulkopuolista aluetta tutkittaessa puolestaan  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r$ . Ulospäin suuntautuva normaaliderivaatta on

$$\begin{aligned} \left. \frac{\mathbf{r}'}{a} \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right|_{\mathbf{r}' \in S} &= - \left. \frac{1}{a} \frac{a^2 - r^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right|_{\mathbf{r}' \in S} \\ &= \frac{r^2 - a^2}{a} (a^2 - 2ar \cos \gamma + r^2)^{-3/2} \end{aligned} \quad (2.116)$$

missä  $\gamma$  on  $\mathbf{r}$ :n ja  $\mathbf{r}'$ :n välinen kulma.

Sovelletaan Greenin funktiota tapaukseen, jossa pallon sisällä ei ole varausta eli ratkaistaan Laplace'n yhtälö reunaehtolla  $\varphi(a) = f(\mathbf{r})$ , kun  $\mathbf{r}$  on pallon pinnalla. Tämä antaa *Poissonin kaavana* tunnetun tuloksen:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{a^2 - r^2}{4\pi a} \int_S \frac{f(a, \theta', \phi')}{(a^2 - 2ar \cos \gamma + r^2)^{3/2}} dS' \\ &= \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi} \int_S \frac{f(a, \theta', \phi')}{(a^2 - 2ar \cos \gamma + r^2)^{3/2}} d\Omega' \end{aligned} \quad (2.117)$$

joka ilmaisee siis potentiaalın alueen *sisällä* olettaen potentiaali tunnetuksi pallon pinnalla. Jos puolestaan halutaan tarkastella potentiaalia pallon ulkopuolella, pintaintegraalissa normaalin suunta määritellään ulospäin ja ainoa muutos on korvata  $(a^2 - r^2) \rightarrow (r^2 - a^2)$ .