

# Luku 1

## Johdanto

*It requires a much higher degree of imagination to understand the electromagnetic field than to understand invisible angels.*

R. P. Feynman

### 1.1 Mikä tämä kurssi on

Edessä on koko kevätlukukauden kestävä 10 opintopisteen paketti elektrodynamiikkaa. *Kurssin tavoitteena on oppia ymmärtämään elektrodynamiikan perusrakenne ja käyttämään sitä erilaisissa vastaan tulevissa tilanteissa.* Elektrodynamiikan rakenteen ymmärtäminen kuuluu jokaisen fyysikon yleissivistykseen. Toisaalta sähkömagnetismi on keskeisessä osassa kaikkialla fysiikassa ja myös arkipäivässä. Parempaa syytä elektrodynamiikkaan perehtymiselle on vaikea keksiä.

Kurssi on jaksotettu siten, että sähkö- ja magnetostatiikka ja induktiolaki tulevat käsitellyiksi ensimmäisen puolen lukukauden aikana. Kurssin toinen puolikas sisältää pääasiassa dynaamisia ilmiöitä, jolloin samalla mennään syvemmälle sekä teoriaan että käytäntöön.

Kurssin lähtötasoksi oletetaan ensimmäisenä opiskeluvuonna opettavien fysiikan peruskurssien sähkömagnetismi ja sähködynamiikka sekä matemaattisten apuneuvojen hallinta. Useimmat opiskelijat lienevät myös suorittaneet kurssin suthteellisuusteorian perusteet, jolla on useampikin yhtymäkohta tähän kurssiin.

Elektrodynamiikka on useimmille opiskelijoille ensimmäinen fysiikan teoria, jossa kentän käsitteellä on ratkaiseva osa. Sähkö- ja magneettikentät ovat *vektoriKenttiä* eli niillä on suunta ja suuruus, jotka riippuvat siitä, missä avaruuden pisteessä niitä tarkastellaan. Myös avaruuden jokainen piste voidaan ajatella vektorina. Sen suunta riippuu siitä, missä päin tarkastelupistettä

kyseinen avaruuden piste on, ja suuruus siitä, kuinka kaukana se on tarkastelupisteestä. Fysiikassa on myös skalaarikenttiä, joiden käsittely on paljon helpompaa. Elektrodynamiikassa esimerkiksi varausjakautuma on tällainen. Sillä on jokaisessa avaruuden pisteessä suuruus muttei suuntaa.

Kentän käsittely johtaa aiempia fysiikan kursseja vaativampien matemaattisten apuneuvojen tarpeeseen. Viimeistään elektrodynamiikkaa opiakseen ja ymmärtääksensä onkin opetettava laskemaan sujuvasti. Tällä kursilla opiskelijan oletetaan hallitsevan fysiikan matemaattisia menetelmiä MA-PU I–II:n ja FYMM I:n tasolla. Koska monet teoreettisen fysiikan opiskelijat suorittavat elektrodynamiikan kurssin jo toisen vuoden keväällä, FYMM II:ta ei oleteta suoritetuksi, mutta kurssin opiskelu viimeistään tämän kurssin rinnalla on suositeltavaa. Sähkö- ja magnetostatiikassa tarvitaan paljon vektorilaskentaa, johon kuuluu erinäinen kokoelma derivointi- ja integrointitaitoja. Ne on syytä opetella heti kunnolla, koska niitä tarvitaan ihan oikeasti (jopa myöhemmin esimerkiksi tutkijan työssä). Muuta perustarvikkeista ovat esimerkiksi FYMM I:ltä tutut Fourier-sarjat ja kompleksiluvut. Uutta useimmille opiskelijoille lienee suhteellisuusteoriassa tarvittava tensorilaskenta. Muutamiin sen perustekniikoihin tutustutaan suppeamman suhteellisuusteorian yhteydessä luvussa 14.

Laskuharjoitustehtävien ratkaiseminen on olennainen osa oppimista. Vaikeimpien ongelmien kohdalla aktiivinen ryhmätyö on erittäin hyödyllistä, kuten myös kirjallisuuden käyttö. Physicumin kirjasto tarjoaa tähän hyvän ympäristön, mutta myös internetissä on tarjolla alati kasvava määrä opiskelijalle hyödyllistä sivustoa. Myös tässä monisteessa on merkitty harjoitustehtäviksi (HT) joitain pohtimisen arvoisia ongelmia.

Välikokeissa ja lopputenteissa on syytä ”laskennallisissa” tehtävissä kirjoittaa lyhyt sanallinen perustelu. Oikein ymmärretystä fysiikasta voi herua irtopisteitä, vaikka laskenta olisi epäonnistunut. Sanattomat kaavailut eivät ole välttämättä kovin ansiokkaita.

## 1.2 Hieman taustaa

Klassinen elektrodynamiikka on yksi fysiikan peruskivistä. Se saavutti nykyisen muotoilunsa vuonna 1864, kun James Clerk Maxwell julkaisi ensimmäisen painoksen kuuluisasta teoksestaan ”*Treatise on Electricity and Magnetism*”. Vaikka Maxwell olikin yksi fysiikan tutkimuksen jättiläisistä, hänen monumenttinsa perustui tietenkin useiden aiempien fyysikkopolvien tutkimuksiin. Mainittakoon tässä 1700-luvulta vaikkapa Cavendish, Coulomb, Franklin, Galvani, Gauss ja Volta sekä 1800-luvun alkupuolelta Ampère, Arago, Biot, Faraday, Henry, Savart ja Ørsted.

Tärkeimpiä Maxwellin teorian ennustuksia oli valonnopeudella etenevä

sähkömagneettinen aaltoliike, jonka Heinrich Hertz onnistui todentamaan rakentamallaan värähtelypiirillä vuonna 1888. Pian tämän jälkeen tultiin yhteen fysiikan historian suureen murroskauteen. Osa ongelmista liittyi suoraan elektrodynamiikkaan, jonka kummallisuuksia olivat esimerkiksi liikkeen indusoiman jännitteen ja sähkömotorisen voiman ekvivalenssi sekä valon nopeuden vakioisuus. Juuri näitä selittämään Albert Einstein kehitti suppeamman suhteellisuusteoriaansa vuonna 1905. Vaikka suhteellisuusteorian perusteet voi ollakin nykyopiskelijalle havainnollisempaa opetella mekaniikan välinein, kyseessä on nimenomaan elektrodynamiikasta noussut teoria. Jälkiviisaasti ajatellen Maxwellin elektrodynamiikka osoittautui ensimmäiseksi relativistisesti korrektilisti muotoilluksi teoriaksi.

Samaan aikaan suhteellisuusteorian kanssa alkoi kvanttifysiikan kehitys. Siihen liittyi vielä vaikeampia elektrodynamiikan ongelmia. Ensinnäkään ei ollut selvää, että makroskooppisista kokeista johdettu teoria olisi riittävän yleinen myös mikromaailmassa. Kaiken lisäksi kvanttimekaniikan alkuperäiset muotoilut, kuten Schrödingerin yhtälö, olivat epärelativistisia. Kesti aina 1940-luvun lopulle ennen kuin onnistuttiin luomaan kunnollinen relativistinen kvanttimekaniikka. Tätä teoriaa kutsutaan *kvanttielektrodynamiikaksi* (QED) ja ratkaisevat askeleet sen luomisessa ottivat Julian Schwinger, Richard Feynman, Sin-Itiro Tomonaga ja Freeman Dyson. QED:ssä osataan laskea tarkkoja tuloksia, mutta sen matemaattinen perusta on jonkin verran ongelmallinen, koska teoria sisältää äärettömyyksiä, jotka pitää "renormalisoida" pois erityisen muodollisen reseptin turvin.

Vuonna 1967 Steven Weinberg ja Abdus Salam onnistuivat johtamaan sekä (Q)ED:n että heikon vuorovaikutuksen teorian yleisemmän yhtenäisteorian matalaenergiarajoina. Kyseinen yhtenäisteoria on elektrodynamiikan yleistys tapaukseen, jossa varauksia on enemmän kuin yhtä (etumerkillistä) tyyppiä. Samaan tapaan elektrodynamiikkaa monimutkaistamalla luotiin 1970-luvulla ilmeisen onnistunut malli myös vahvoille vuorovaikutuksille. Siinä "varauksia" on kolmenlaisia. Tämän vuoksi vahvojen vuorovaikutusten yhteydessä puhutaan usein "väreistä" ja "värivoimasta". Vahvojen vuorovaikutusten teoria ja Weinbergin ja Salamin sähköheikon vuorovaikutuksen teoria elävät nykyään rauhanomaista rinnakkaineloa niinsanottuna hiukkasfysiikan standardimallina. Klassisen elektrodynamiikan ymmärtäminen on todellakin välttämätön perusta pidemmälle menevän teoreettisen fysiikan tekemiselle, sillä siihen nojaavat sekä suhteellisuusteoria että kvanttiteoria, ja modernit hiukkasfysiikan teorit ovat sen yleistyksiä.

Vaikka käsitteellisesti elektrodynamiikka onkin tullut osaksi kvanttimaailmaa, se on yhä äärimmäisen tärkeä työväline kaikessa kokeellisessa fysiikassa ja insinööritieteissä ydinvoimaloista kännyköiden rakenteluun. Lähes kaikissa fysiikan mittauksissa tarvitaan elektrodynamiikan soveltamista jossain vaiheessa. Se on keskeistä materiaalfysiikassa, hiukkasfysiikassa, röntgenfysiikassa, elektroniikassa, optiikassa, plasmafysiikassa jne. Klassisen

elektrodynamiikan ymmärtäminen on aivan olennainen perusta menestyksekkäälle kokeellisen fysiikan tekemiselle!

Elektrodynamiikan perusasioihin kuuluu mm.:

- Varauksellisten hiukkasten ja sähkövirtojen aiheuttaman sähkömagneettisen kentän (sekä staattisen että aaltokentän) määrittäminen.
- Sähkömagneettisen kentän varauksiin tai virtajohtimiin aiheuttamien voimien määrittäminen.
- Varauksellisten hiukkasten radan määrittäminen tunnetussa sähkömagneettisessa kentässä.
- Indusoituvan sähkömotorisen voiman ja induktiovirran ennustaminen tunnetussa virtapiirissä, kun indusoiva muutos tunnetaan.
- Tunnetun indusoivan muutoksen vaikutuksesta ympäristöön leviävän sähkömagneettisen aaltoliikkeen ja tämän avulla tapahtuvan energian siirtymisen ennustaminen.

### 1.3 Elektrodynamiikan perusrakenne

Useat elektrodynamiikan oppikirjat rakentavat teorian esittelyn pala palalta lähtien sähköstatiikasta ja päätyen *Maxwellin yhtälöihin* ikäänkuin olettaen, että opiskelijat eivät olisi koskaan kuulleetkaan asiasta. Tämä ei ole aivan totta enää opintojen tässä vaiheessa, vaan Maxwellin yhtälöihin on jo tutustuttu ainakin päällisin puolin eikä sähkömagnetismi ole aivan uusi ja outo asia. Pohditaanpa jo näin kurssin aluksi hieman, mistä elektrodynamiikassa on kyse. Kirjoitetaan Maxwellin yhtälöt ”tyhjiömuodossaan”:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (1.4)$$

*Sähkökentän*  $\mathbf{E}$  ja *magneettikentän* (täsmällisemmin magneettivuon tiheyden)  $\mathbf{B}$  aiheuttajina ovat *sähkövaraukset*  $\rho$  ja *sähkövirrat*  $\mathbf{J}$ . Näin kirjoitettuna yhtälöryhmä on täysin yleinen eikä ota minkäänlaista kantaa mahdollisen väliaineen sähkömagneettiseen rakenteeseen. Väliaineessa yhtälöryhmä kirjoitetaan usein väliaineen rakenteesta riippuvien kenttien  $\mathbf{D}$  ja  $\mathbf{H}$  avulla, mihin palataan myöhemmin.

Yllä  $\epsilon_0$  on tyhjiön *sähköinen permittiivisyys* ja  $\mu_0$  on *tyhjiön magneettinen permeabiliteetti*. Näiden ja *valonnopeuden*  $c$  välillä on yhteys  $c =$

$(\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ . Koska valon nopeus tyhjiössä on vakio, sille annetaan nykyään *tarkka* arvo

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}.$$

Sekunti määritellään puolestaan cesium-atomin tietyn siirtymäviivan avulla, jolloin metrillä tulee johdannaissuure, joka on aika tarkkaan saman mittainen kuin Pariisissa säilytettävä kuuluisa platinatanko. Myös  $\mu_0$  määritellään tarkasti ja se on SI-yksiköissä

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ V s A}^{-1} \text{ m}^{-1},$$

joten myös tyhjiön permittiivisyydelle tulee tarkka arvo  $\epsilon_0 = (c^2\mu_0)^{-1}$ , jonka numeerinen likiarvo on

$$\epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ A s V}^{-1} \text{ m}^{-1}.$$

Sähkö- ja magneettikenttiä ei voi havaita suoraan, vaan ne on määritettävä voimavaikutuksen avulla. Sähkömagneettinen kenttä vaikuttaa nopeudella  $\mathbf{v}$  liikkuvaan varaukseen  $q$  *Lorentzin voiman*

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.5)$$

välityksellä. Tämä on suureen määrään kokeita perustuva *empiirinen laki*, jota emme edes yritä johtaa mistään vielä perustavammasta laista. Vaikka sähkö- ja magneettikenttiä ei voikaan “nähdä”, ne ovat fysikaalisia olioita. Niillä on energiaa, liikemäärää ja liikemäärämomenttia ja ne kykenevät siirtämään näitä suureita myös tyhjiössä.

Mitattavat sähkö- ja magneettikentät ovat aina jossain mielessä makroskooppisia suureita. Mikroskooppisessa kuvailussa QED:n tasolla sähkömagneettinen kenttä esitetään todellisten ja virtuaalisten fotonien avulla. Tähän ei yleensä ole tarvetta arkipäivän sähkötekniikassa tai tavanomaisissa laboratorioskokeissa, mikä käy ilmi seuraavista esimerkeistä (**HT**: tarkasta lukuarvot peruskursseilla oppimasi avulla):

- Yhden metrin päässä 100 W lampusta keskimääräinen sähkökenttä on suunnilleen  $50 \text{ V m}^{-1}$ . Tämä merkitsee  $10^{15}$  näkyvän valon fotonin vuota neliösenttimetrin suuruisen pinnan läpi sekunnissa.
- Tyypillisen radiolähettimen taajuus on 100 MHz suuruusluokkaa. Vastaavan fotonin liikemäärä on  $2,2 \cdot 10^{-34} \text{ N s}$ . Yksittäisten fotonien vaikutusta ei siis tarvitse huomioida esimerkiksi antennisuunnittelussa.
- Varausten diskreettisyyttä ei myöskään tarvitse huomioida tavanomaisessa käyttöelektronikassa. Jos yhden mikrofaradin kondensaattoriin varataan 150 V jännite, siihen tarvitaan  $10^{15}$  alkeisvarausta. Toisaalta yhden mikroampeerin virran kuljetukseen tarvitaan  $6,2 \cdot 10^{12}$  varausta sekunnissa.

Yksi elektrodynamiikan peruskivistä on sähköisen voiman  $1/r^2$ -etäisyysriippuvuus. Jo hyvin varhaisista havainnoista voitiin päätellä, että riippuvuus on ainakin likimain tällainen. Olettamalla riippuvuuden olevan muotoa  $1/r^{2+\varepsilon}$ , voidaan mittauksilla etsiä rajoja  $\varepsilon$ :lle. Cavendish päätyi vuonna 1772 tarkkuuteen  $|\varepsilon| \leq 0,02$ . Maxwell toisti kokeen sata vuotta myöhemmin ja saavutti tarkkuuden  $|\varepsilon| \leq 5 \cdot 10^{-5}$ . Nykyään on samantyyppisillä koejärjestelyillä päästy tulokseen  $|\varepsilon| \leq (2,7 \pm 3,1) \cdot 10^{-16}$ .

Teoreettisesti voi perustella, että  $1/r^2$ -etäisyysriippuvuus on yhtäpitävää fotonin massattomuuden kanssa. Tarkin Cavendishin menetelmään perustuva tulos vastaa fotonin massan ylärajaa  $1,6 \cdot 10^{-50}$  kg. Geomagneettisilla mittauksilla yläraja on saatu vieläkin pienemmäksi:  $1,4 \cdot 10^{-51}$  kg. Tietyt astrofysikaaliset havainnot viittaavat jopa toistakymmentä kertalukua pienempään massan ylärajaan. Nämä arviot ovat kuitenkin jossain määrin malliriippuvaisia ja niinpä esimerkiksi kansainvälinen *Particle Data Group* on vuonna 2008 tyytynyt ylärajaan  $10^{-18}$  eV/c<sup>2</sup>  $\leftrightarrow$   $1,8 \cdot 10^{-54}$  kg. Joka tapauksessa fotonin massattomuus ja sähköisen voiman  $1/r^2$ -etäisyysriippuvuus ovat erittäin hyvin todennettuja *kokeellisia* tosiasioita.

Lopuksi on hyvä muistaa, että elektrodynamiikka tehtiin aluksi makroskooppisille systeemeille. Vasta paljon myöhemmin opittiin, että elektrodynamiikan peruslait ovat yleisiä luonnonlakeja, jotka pätevät myös kvanttitasolla.

## 1.4 Kirjallisuutta

Vaikka tämä luentomoniste pyrkiikin kattamaan kurssin materiaalin, tulevien opintojen kannalta on hyödyllistä oppia käyttämään myös muita lähteitä. Kurssin oppikirjoina voi pitää teoksia:

- Cronström, C., ja P. Lipas, *Johdatus sähködynamiikkaan ja suhteellisuusteoriaan*, Limes ry., 2000 (jatkossa viite CL).
- Reitz, J. R., F. J. Milford, and R. W. Christy, *Foundations of Electromagnetic theory*, 4th edition, Addison-Wesley, 1993 (viite RMC).

### Suosittelavaa oheislukemistoa:

- Feynman, R. P., R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman lectures on physics*, vol. II, Addison-Wesley, 1964 (viite Feynman).

Ehdottomasti tutustumisen arvoinen teos! Kirja sisältää erinomaisia esimerkkejä ja syvällistä ajattelua ilman hankalaa laskennallista käsittelyä.

- Griffiths, D. J., *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, 1999.

Suosittu oppikirja amerikkalaisissa yliopistoissa. Persoonallinen esitystapa ja paljon opettavaisia esimerkkejä.

- Jackson, J. D., *Classical electrodynamics*, 3rd edition, John Wiley & Sons, 1998 (viite Jackson).

Klassisen elektrodynamiikan piipia. Harjoitustehtävistä löytyy riittävän haastavia ongelmia parhaillekin oppilaille. Myös aiemmat versiot ovat käyttökelpoisia, joskin niissä on käytetty cgs-yksiköitä.

- Kurki-Suonio, K. ja R., *Vuorovaikutuksista kenttiin – sähkömagnetismin perusteet ja Aaltoliikkeestä dualismiin*, Limes ry., useita painoksia.

Erittäin fysikaalista tekstiä selvällä suomen kielellä. Tukee erityisen hyvin sähkö- ja magnetostatiikkaa ja aaltoliikkeen perusteita.

- Lindell, I., *Sähkötekniikan historia*, Otatiето, 1994.

Sähkömagnetismin historiaa ammoisista ajoista 1900-luvun alkuun.

- Lindell, I. ja A. Sihvola, *Sähkömagneettinen kenttäteoria. 1. Staattiset kentät*, Otatiето, 1999. Sihvola, A. ja I. Lindell, *Sähkömagneettinen kenttäteoria. 2. Dynaamiset kentät*, Otatiето, 2000. Sihvola, A., *Sähkömagneettisen kenttäteorian harjoituskirja*, Otatiето, 2001.

Elektrodynamiikkaa suunnilleen vastaava kokonaisuus Aalto-yliopistossa. Hie-man erilainen lähestymistapa, mutta tutustumisen arvoinen.