Elektrodynamiikka, kevät 2012
Harjoitus 1
Palautus Ti 24.1. klo 12

1. Todista seuraavat ulkoa osattavat vektori-identiteetit:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

Kannattaa opetella käyttämään permutaatiosymbolia eli Levi-Civitan symbolia. Esimerkiksi $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$, missä summataan kahdesti esiintyvien indeksien yli. Erityisen kätevä tulos on $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$. Huomaa myös, että $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i$.

2. Luennolla johdettiin seuraavat lausekkeet pallosymmetrisen skalaarikentän gradientille ja pallosymmetrisen, radiaalisen vektorikentän divergenssille:

$$\nabla \phi(r) = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r$$

$$\nabla \cdot (F(r)\vec{e}_r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 F)$$

Johda vastaavat tulokset sylinterisymmetriselle tapaukselle. Parametri r edustaa nyt etäisyyttä symmetria-akselista, joksi voidaan valita z-akseli, eli $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Talleta saamasi tulokset. Niistä voi olla hyötyä myöhemmissä harjoituksissa.

3. Pallokalotin, jonka reunan pallokoordinaatistossa määrittelee ehto $\theta < \theta_{max}$, pinnalla on tasainen varauskate σ. Pallon säde on R. Laske sähkökenttä pallon keskipisteessä. Tarkista vielä, että erikoistapauksissa $\theta_{max} = 0$ (ei varausta) ja $\theta_{max} = \pi$ (tasaisesti varattu pallonkuori) sähkökenttä häviää.

4. R-säteisen pallon sisällä on varaustiheys $\rho(r) = 2Qr/(\pi R^4)$, missä r on etäisyys pallon keskipisteestä ja Q on vakio. Tämän lisäksi pallon pinnalla on tasainen varauskate $\sigma = -Q/(4\pi R^2)$. Osoita että pallon kokonaisvaraus on $+Q$. Laske sähkökenttä ja potentiaali pallon sisä- ja ulkopuolella.

5. Lasketaan tehtävä 4 nyt takaperin. Lähde liikkeelle tehtävästä 4 saamastasi sähkökentästä. Sovella Maxwellin ensimmäistä yhtälöä ja määritä varausjakauma kaikkialla. Pallon pinnan kohdalla käytä Gaussin lakia integraalimuodossa määrittääksesi varauskatteen. Jos lasku menee oikein, sinun pitäisi päästä takaisin alkuperäiseen varausjakaumaan ja -katteeseen.